

Федеральное агентство по образованию
Южно-Уральский государственный университет
Институт открытого и дистанционного образования
Кафедра прикладной математики

519.1(07)
Э157

А.Ю. Эвнин

Комбинаторика и теория графов

Учебно-методический комплекс

Челябинск
2005

УДК 519.1(075.8)

Учебно-методический комплекс (УМК) знакомит студентов специальности 010502 "Прикладная информатика (в экономике)" с понятиями, моделями и методами комбинаторики и теории графов, широко применяемыми в экономических и компьютерных науках и практической деятельности.

УМК включает: рабочую программу дисциплины, календарно-тематический план для самостоятельной работы студентов, методические указания по самостоятельному изучению дисциплины, теоретический материал, практикум, содержащий примеры решения типовых задач, задания для контрольной работы по каждой теме и список общедоступной учебной и справочной литературы. Теоретический материал представляет собой достаточно подробный конспект лекций, при этом демонстрируется применение математического аппарата для решения конкретных экономических задач.

Ил. 37. Табл. 18. Библиогр.: 35 назв.

Рецензенты:

М.М. Кипнис, д-р физ.-мат. наук, проф. ЧГПУ,

В.И. Заляпин, канд. физ.-мат. наук, проф. ЮУрГУ.

©А.Ю. Эвнин, 2005

©ИОДО ЮУрГУ, 2005

Содержание

Предисловие	5
Рабочая программа дисциплины	7
Календарно-тематический план работы студента	10
Методические рекомендации	11
Теоретический материал по темам	13
1. Комбинаторика	13
1.1. Правило произведения и его применения	14
1.1.1. Правило произведения	14
1.1.2. Число перестановок	15
1.1.3. Число подмножеств конечного множества	15
1.2. Выборки	15
1.2.1. Классификация выборок	16
1.2.2. Размещения	16
1.2.3. Сочетания	17
1.2.4. Сочетания с повторениями	17
1.2.5. Перестановки с повторениями	19
1.3. Полиномиальная формула	20
1.4. Комбинаторные тождества	22
1.5. Формула включения-исключения и её применения	26
1.5.1. Формула включения-исключения	26
1.5.2. Задача о беспорядках и встречах	27
1.5.3. Число сюръекций	30
1.5.4. Обобщение формулы включения-исключения	31
1.6. Линейные рекуррентные уравнения	32
1.6.1. Решение линейных рекуррентных уравнений	33
1.6.2. Числа Фибоначчи	35
2. Теория графов	37
2.1. Определения и примеры	37
2.1.1. Понятие графа	37
2.1.2. Связность	43
2.1.3. Метрические характеристики	47

2.2.	Гамильтоновы графы	48
2.3.	Эйлеровы графы	50
2.4.	Деревья	54
2.4.1.	Определения и свойства	54
2.4.2.	Теорема Кэли о числе помеченных деревьев .	57
2.4.3.	Стягивающие деревья	59
2.5.	Кратчайшие пути	63
2.5.1.	Ориентированные графы	63
2.5.2.	Нахождение кратчайших путей в орграфе . .	64
2.6.	Задача сетевого планирования и управления (PERT) .	69
2.7.	Потоки в сетях	73
Практикум		79
Вопросы для самоконтроля		97
Материалы для контрольных работ		101
Библиографический список		113
Ресурсы Интернета		116
Предметный указатель		118

Предисловие

Комбинаторика и теория графов играют важную роль как звено математического образования инженеров, экономистов, управленцев. Прекрасно об этом сказано в предисловии к книге О.П. Кузнецова и Г.М. Адельсона-Вельского "Дискретная математика для инженеров":

"Среди практиков очень распространен взгляд на математику как на большой справочник, который нужно уметь открыть на нужной странице. Инженеры любят формулы и методы, но не любят теорем и тем более — их доказательств. При утилитарном подходе к математике знание доказательства ничего не добавляет к знанию результата: важно знать, "что" и "зачем", но очень редко — "как" и "почему". Такой подход может оправдывать себя в областях с давно установившимися моделями объектов и процессов. Однако в задачах управления все чаще главной научной проблемой становится создание новых моделей. В такой ситуации математика нужна уже не как метод расчета, а как метод мышления, как язык, как средство формирования и организации понятий. Такое владение математикой требует существенно большей культуры: понимания важности точных формулировок..., умения понять, что просто, что сложно, а что невозможно, ощущения связи между, казалось бы, далекими идеями и понятиями."

Бурное развитие вычислительной техники расширяет возможности комбинаторики и теории графов в постановке и решении различных прикладных задач.

В результате изучения и освоения этой дисциплины студент, обучающийся по специальности 010502 "Прикладная информатика (в экономике)", должен:

- знать основные принципы и понятия комбинаторики и теории графов;
- уметь формулировать в комбинаторно-графовых терминах задачи, связанные с дискретными объектами;

- иметь навыки решения типовых комбинаторных задач и применения известных алгоритмов теории графов;
- приобрести знания для изучения других естественно-научных дисциплин.

В процессе изучения курса каждый студент выполняет курсовое задание, включающее в себя 8 задач (всего в пособии приведено 32 варианта таких заданий):

- четыре задачи по комбинаторике (в них используются полиномиальная формула, формула включения-исключения и другие формулы комбинаторики);
- четыре задачи на применение известных алгоритмов на графах:
 - нахождение минимального стягивающего дерева;
 - нахождение кратчайшего пути в орграфе от фиксированной вершины до всех остальных;
 - задача сетевого планирования и управления;
 - нахождение максимального потока в сети.

Рабочая программа дисциплины

Цели и задачи дисциплины

Комбинаторика и теория графов играют важную роль как звено математического образования инженеров, экономистов, управленцев. В результате освоения данной дисциплины студенты приобретают знания, необходимые для изучения других естественно-научных дисциплин.

Основные цели изучения дисциплины: выпускник должен владеть стандартными методами решения типовых комбинаторных задач, уметь формулировать в комбинаторно-графовых терминах задачи, связанные с дискретными объектами.

Содержание дисциплины

Разделы дисциплины и их содержание

Раздел 1. Комбинаторика

Тема 1.1. Правило произведения и его применения

Правило произведения. Число перестановок. Число подмножеств конечного множества.

Тема 1.2. Выборки

Классификация выборок. Размещения. Сочетания. Сочетания с повторениями. Перестановки с повторениями.

Тема 1.3 Полиномиальная формула

Тема 1.4 Комбинаторные тождества

Тема 1.5 Формула включения-исключения и её применения

Формула включения-исключения. Задача о беспорядках и встречах. Число сюръекций. Обобщение формулы включения-исключения.

Тема 1.6 Линейные рекуррентные уравнения

Решение линейных рекуррентных уравнений. Числа Фибоначчи.

Раздел 2. Теория графов

Тема 2.1. Определения и примеры

Основные определения и примеры. Маршруты. Связность. Метрические характеристики.

Тема 2.2. Гамильтоновы графы

Определения и примеры. Теорема О. Оре.

Тема 2.3. Эйлеровы графы

Определения и примеры. Критерий. Алгоритм Флёрри. Теорема Р. Рейда.

Тема 2.4. Деревья

Деревья и леса. Теорема Кэли о числе помеченных деревьев. Стягивающие деревья. Алгоритмы Краскала и Прима.

Тема 2.5. Кратчайшие пути

Нахождение кратчайших путей в ориентированных графах. Алгоритмы Дейкстры и Флойда.

Тема 2.6. Задача сетевого планирования и управления**Тема 2.7 Потоки в сетях**

Определения. Алгоритм Форда – Фалкерсона нахождения максимального потока. Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе.

Порядок изучения дисциплины

Необходимые знания по каждой теме приведены в "Теоретических материалах". Там же даны ссылки на литературные источники, углубляющие полученные знания. К каждой теме даны закрепляющие примеры и упражнения, которые студент решает самостоятельно. Контрольные работы по каждому разделу выполняются в соответствии с "Контрольными заданиями" и методическими рекомендациями по их выполнению.

Учебно-методическое обеспечение

Список рекомендуемой литературы

Основная

1. Емеличев В.А. и др. Теория графов. — М.: Наука, 1989. — 384 с.
2. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. — М.: Изд-во МАИ, 1992. — 264 с.
3. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. — СПб.: Питер, 2000. — 304 с.
4. Редькин Н.П. Дискретная математика. — СПб: Лань, 2003. — 96 с.
5. Эвнин А.Ю. Дискретная математика. — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 1998. — 176 с.
6. Эвнин А.Ю. Задачник по дискретной математике. — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2002. — 164 с.
7. Эвнин А.Ю. Варианты индивидуальных заданий по дискретной математике. — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2002. — 22 с.

Дополнительная

1. Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. — 288 с.
2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по курсу дискретной математики. — М.: Наука, 1992.
3. Грэхем Г., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. — М.: Мир, 1998. — 703 с.
4. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. — М.: Энергия, 1988.
5. Ловас Л., Пламмер М. Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии. — М.: Мир, 1998. — 653 с.
6. Эвнин А.Ю. Вокруг теоремы Холла. — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2004. — 71 с.

Средства и материально-техническое обеспечение

Анимации, демонстрирующие работу основных алгоритмов на графах.

Программу составил доцент Эвнин А.Ю.

Календарно-тематический план работы студента

Номер темы	Название разделов, тем	Объём в неделях	Контрольные мероприятия
1	Комбинаторика	7	Контрольная работа №1
1.1	Правило произведения	1	
1.2 – 1.4	Выборки, полиномиальная формула, комбинаторные тождества	3	
1.5	Формула включения-исключения	2	
1.6	Линейные рекуррентные уравнения	1	
2	Теория графов	8	Контрольная работа №2
2.1	Определения и примеры	2	
2.2, 2.3	Гамильтоновы и эйлеровы графы	2	
2.4	Деревья	1	
2.5	Кратчайшие пути	1	
2.6	Сетевое планирование	1	
2.7	Потоки в сетях	1	

Методические рекомендации

Методические рекомендации по изучению теоретического материала

Теоретический материал представляет собой конспект лекций, содержащий необходимый набор сведений по комбинаторике и теории графов. Подробно разобраны типовые задачи. Для более глубокого понимания изучаемого математического аппарата необходимо воспользоваться общедоступными учебниками по дискретной математике, перечень которых приведен в разделе "Список рекомендуемой литературы".

Методические рекомендации по решению практических задач

В связи с практическим отсутствием общепризнанных и широко распространённых задачников по комбинаторике и теории графов в данном УМК приводится необходимый набор задач. Часть этих задач имеет характер тренировочных упражнений, закрепляющих определения и формулы. Некоторые же задачи имеют теоретический характер — их решение позволит более глубоко овладеть методами изучаемой дисциплины. Решение большинства этих задач можно найти в книгах из списка рекомендованной литературы.

Методические рекомендации по выполнению контрольных заданий

Основная цель контрольных работ — получение практических навыков решения конкретных задач и примеров по основным разделам комбинато-

рики и теории графов, а также осуществление контроля за ходом учебного процесса при самостоятельной работе студента.

Для допуска к сдаче зачёта студенту необходимо решить не менее 6 задач из 8.

При безукоризненном выполнении всех 8 задач контрольных работ студент получает зачёт "автоматом".

Варианты контрольных работ определяются по номеру студента в списке группы.

Теоретический материал по темам

Раздел 1. Комбинаторика

Комбинаторика — часть математики, изучающая способы решения задач пересчета и перечисления элементов в конечных множествах. Задача *перечисления* состоит в выделении элементов, принадлежащих некоторому заданному конечному множеству и удовлетворяющих некоторым свойствам, а задача *пересчета* — в нахождении числа таких элементов. Например, задача: *Описать все расположения 8 одинаковых ладей на шахматной доске, при которых ладьи не бьют друг друга* — есть задача перечисления, а если требуется найти количество указанных расположений, то это будет задача пересчета. Обычно в подобных задачах речь идет о комбинациях некоторых объектов, поэтому такие задачи называют *комбинаторными*. Приведем ещё два примера комбинаторных задач.

1. *В турнире по олимпийской системе ("проигравший — выбывает") участвует n человек. Сколько встреч будет проведено?*
2. *В правлении банка 7 человек. Каково должно быть минимальное число замков от сейфа и как следует распределить ключи между членами правления (каждый член правления может получить ключи от нескольких замков), чтобы любое большинство сейф могло открыть, а любое меньшинство — не могло?*

Комбинаторика возникла как "математика досуга"; например, с ее помощью подсчитывались шансы участников карточных и других азартных игр. Появление мощной вычислительной техники резко увеличило возможности комбинаторики и расширило круг ее приложений. Комбинаторные методы применяются ныне в теории вероятностей, статистике, экономике, биологии, химии, физике и других областях науки.

Тема 1.1. Правило произведения и его применения

1.1.1. Правило произведения

Теорему, которую мы сейчас сформулируем и докажем, часто называют *основным принципом комбинаторики*.

Теорема 1. (Правило произведения) Пусть подсчитывается количество объектов, каждый из которых строится в результате последовательного выполнения n действий. Первое действие может быть выполнено a_1 способами, второе — a_2 способами, ..., последнее — a_n способами, при этом количество способов выполнить каждое действие не зависит от того, какими были предыдущие действия. Тогда общее количество объектов равно $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$.

Доказательство проводится методом математической индукции.

При $n = 1$ доказываемое утверждение очевидно. Пусть $n = 2$. Закодируем последовательность действий упорядоченной парой чисел (i, j) , где i — номер способа выполнить первое действие, а j — второе. Тогда всевозможные способы выполнить два действия можно описать прямоугольной таблицей

$$\begin{array}{ccccccc} (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & \dots & (1, a_2) \\ (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & \dots & (2, a_2) \\ & & & \dots & \\ (a_1, 1) & (a_1, 2) & (a_1, 3) & \dots & (a_1, a_2) \end{array}$$

В таблице a_1 строк и a_2 столбцов, а, значит, $a_1 \cdot a_2$ элементов. Утверждение для случая двух действий доказано.

Переходим к *индукционному шагу*. Предположим, что правило произведения справедливо при $n = k \geq 2$. Последовательность из $k + 1$ действий будем кодировать упорядоченным набором чисел $(i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1})$, где i_j — номер способа выполнить j -е действие. Таких наборов — столько же, сколько упорядоченных пар $((i_1, i_2, \dots, i_k), i_{k+1})$, в которых первый элемент — упорядоченный набор из k элементов. По предположению число наборов $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ равно $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k$; второй элемент пары — i_{k+1} — по условию выбирается a_{k+1} способами. Всего пар будет $(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k) \cdot a_{k+1} = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k \cdot a_{k+1}$, что и требовалось доказать. $\square$

Применим правило произведения к решению двух важных комбинаторных задач.

1.1.2. Число перестановок

Пусть имеется n различных элементов. **Перестановкой** n элементов называют их расположение на n различных местах. Подсчитаем число таких перестановок. Каждую перестановку можно получить в результате последовательного выполнения n действий.

Первое действие — выбор места для первого элемента — выполняется n способами.

Второе действие — выбор места для второго элемента — выполняется $n-1$ способами, поскольку одно место уже занято, и число свободных мест на единицу уменьшилось. И так далее. Наконец, размещение последнего, n -го элемента осуществляется однозначно.

По правилу произведения число всех перестановок n элементов равно $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$

1.1.3. Число подмножеств конечного множества

Пусть A — множество, содержащее n элементов. Для малых n подсчитаем число всевозможных подмножеств множества A . Для этого составим следующую таблицу.

n	A	все подмножества A	число подмножеств
1	$\{a\}$	$\phi, \{a\}$	2
2	$\{a, b\}$	$\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$	4
3	$\{a, b, c\}$	$\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$	8

Возникает предположение, что число всех подмножеств n -элементного множества равно 2^n . Справедливость его легко доказать с помощью правила произведения. Действительно, произвольное подмножество n -элементного множества можно получить в результате выполнения следующих n действий: 1-е действие "определяет судьбу" 1-го элемента множества — быть ему в формируемом подмножестве или нет, 2-е действие касается 2-го элемента, ..., n -е действие — n -го элемента. Таким образом каждое из n действий может быть выполнено двумя способами. Согласно правилу произведения, число способов выполнить все n действий, а значит, и число всех подмножеств исходного множества равно 2^n .

Тема 1.2. Выборки

1.2.1. Классификация выборок

Пусть задано некоторое конечное множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — **генеральная совокупность**. Из элементов генеральной совокупности образуются **выборки**:

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}, \text{ где } \forall j \ i_j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Выборки классифицируются следующим образом.

В зависимости от того, существует порядок элементов выборки или нет, ее называют **упорядоченной** или **неупорядоченной**.

В зависимости от того, могут или не могут элементы выборки повторяться, ее называют выборкой **с повторениями** или выборкой **без повторений**. Упоминание об отсутствии повторений часто опускают, в то время как допустимость повторений элементов в выборке всегда специально оговаривается.

Число элементов выборки называют ее **объёмом**. Выборку объёма r называют r -выборкой.

1.2.2. Размещения

Размещением из n элементов по m называется упорядоченную m -выборку из n -элементной генеральной совокупности.

Пример. Пусть $n = 3$, $m = 2$. Обозначим элементы исходного 3-элементного множества a, b, c . Выпишем всевозможные размещения из 3 по 2 (без повторений):

$$(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b).$$

Если говорить о размещениях с повторениями, то к указанному списку добавится ещё 3 размещения: $(a, a), (b, b), (c, c)$.

Число размещений из n по m без повторений обозначают A_n^m , а с повторениями $\overline{A}_n^m$. Например, $A_3^2 = 6$, $\overline{A}_3^2 = 9$. Несложно получить общие формулы для числа размещений. Если элементы размещения не могут повторяться, то число способов, каким можно выбрать каждый очередной элемент размещения, будет на единицу меньше, чем для предшествующего ему, а так как первый элемент размещения выбирается n способами, то с помощью правила произведения получаем формулу

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1).$$

Полученное произведение содержит m множителей, его иногда обозначают так: $(n)_m$. В размещении с повторениями *каждый* очередной элемент может быть выбран n способами, поэтому $\overline{A}_n^m = n^m$.

1.2.3. Сочетания

Сочетанием из n по m называют неупорядоченную m -выборку из n -элементной генеральной совокупности.

Пример. Пусть $n = 3, m = 2$. Обозначим элементы исходного 3-элементного множества a, b, c . Выпишем всевозможные сочетания из 3 по 2 (без повторений): ab, ac, bc . Если говорить о сочетаниях с повторениями, то к указанному списку добавится ещё 3 сочетания: aa, bb, cc .

Число сочетаний из n по m (без повторений) обозначают C_n^m или $\binom{n}{m}$, а с повторениями — $\overline{C}_n^m$. Например, $C_3^2 = 3, \overline{C}_3^2 = 6$.

Выведем формулу для C_n^m . Всякое размещение из n по m можно получить с помощью процедуры из двух действий:

- 1) выбор элементов, входящих в размещение (другими словами, выбор сочетания из n по m);
- 2) перестановка выбранных элементов.

По правилу произведения получаем $A_n^m = C_n^m \cdot m!$, откуда

$$C_n^m = \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{m!}.$$

Умножив числитель и знаменатель полученной дроби на $(n-m)!$, получим

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

1.2.4. Сочетания с повторениями

Выведем формулу для числа сочетаний с повторениями.

"Закодируем" сочетание с повторениями последовательностью из нулей и единиц следующим образом: сначала запишем столько единиц, сколько раз в сочетание входит первый элемент исходного множества, затем — 0, затем столько единиц, сколько раз в сочетание входит второй элемент исходного множества, затем — 0 и т.д. (после единиц, соответствующих последнему элементу, 0 не ставим).

Примеры. Пусть $n = 3, m = 5$. Тогда $aaabcs$ имеет кодировку 1110101; $abbbb$ — 1011110, $sssss$ — 0011111.

Заметим, что в кодирующей последовательности ровно $n + m - 1$ элемент: m единиц (столько, сколько элементов в сочетании) и $n - 1$ нулей

(отделяющих друг от друга n наборов единиц, соответствующих n элементам исходного множества). Очевидно, что любой последовательности такого вида соответствует некоторое сочетание с повторениями из n по m .

Примеры. При $n = 3, m = 5$ последовательности 1110011 отвечает сочетание *aaacc*, а 0111110 — *bbbbb*.

Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между множеством сочетаний из n по m и множеством последовательностей из m единиц и $n - 1$ нуля. Несложно подсчитать число последних: для построения любой последовательности указанного вида нужно определить m позиций для единиц из $n + m - 1$ возможных; поэтому число последовательностей равно C_{n+m-1}^m . Доказано, что

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m.$$

Рассмотрим несколько задач, при решении которых используются сочетания с повторениями.

- Каким числом способов можно разместить n одинаковых шаров по k различным урнам?

Решение. Присвоим урнам номера от 1 до k . Будем считать, что, помещая шар в урну, мы присваиваем ему ее номер. Тогда размещение шаров по урнам сводится к построению последовательности, в которой n элементов и каждый из них принимает одно из k значений. Таким образом, ответ к задаче: $\overline{C_k^n}$.

- Каким числом способов могут распределиться голоса 1 миллиона избирателей среди 42 избирательных блоков?

Задача сводится к предыдущей. Ответ: $\overline{C_{42}^{10^6}}$.

- Найти число решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

в неотрицательных целых числах.

Опять задача сводится к числу распределений одинаковых шаров по различным урнам, если считать, что x_i — количество шаров, помещаемых в i -ю урну, n — общее число шаров, k — общее число урн. Ответ: $\overline{C_k^n}$.

- Найти число решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

в *натуральных* числах.

Введем новые переменные: $x_i = y_i + 1$ ($i = 1, \dots, k$). Относительно новых переменных y_i получим уравнение уже в *неотрицательных целых* числах

$$y_1 + y_2 + \dots + y_k = n - k,$$

число решений которого $\overline{C_k^{n-k}} = C_{n-1}^{n-k} = C_{n-1}^{k-1}$. Читателю предлагается подумать над тем, как ответ может быть получен непосредственно (без сведения к предыдущей задаче).

1.2.5. Перестановки с повторениями

Перестановками с повторениями называют упорядоченные выборки, в которых каждый элемент генеральной совокупности встречается фиксированное (свое для каждого элемента) число раз.

Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ — генеральная совокупность. Число перестановок с повторениями, в которых элемент a_1 встречается n_1 раз, элемент a_2 — n_2 раз, ..., элемент a_k — n_k раз, обозначают $P(n_1, n_2, \dots, n_k)$. Выведем формулу для $P(n_1, n_2, \dots, n_k)$. Обозначим через n общее число элементов в каждой выборке указанного вида: $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Рассмотрим формирование перестановки с повторениями как процедуру из следующих k шагов.

1. Определяем n_1 мест, которые будет занимать элемент a_1 .
2. Определяем n_2 мест, которые будет занимать элемент a_2 .
- ...
- k . Определяем n_k мест, которые будет занимать элемент a_k .

Первый шаг выполняется $C_n^{n_1}$ способами, второй шаг — $C_{n-n_1}^{n_2}$ способами, ..., k -й шаг — $C_{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}}^{n_k}$ способами. Общее число перестановок с повторениями находим по правилу произведения:

$$\begin{aligned} C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \dots C_{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}}^{n_k} = \\ \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \dots \\ \frac{(n-n_1-\dots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-\dots-n_k)!} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\dots n_k!(n-n_1-\dots-n_k)!}. \end{aligned}$$

Замечая, что $(n - n_1 - \dots - n_k)! = 0! = 1$, получаем окончательный результат:

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}, \text{ где } n = n_1 + n_2 + \dots + n_k.$$

Пример. Сколько различных "слов" можно получить, переставляя буквы слова "колокольчик"?

В слове 11 букв, буквы "к" и "о" встречаются по три раза, буква "л" — дважды, остальные — по одному разу.

Ответ: $\frac{11!}{3!3!2!1!1!1!} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2$.

Тема 1.3. Полиномиальная формула

Теорема 2. Для любых натуральных чисел n и k и любых чисел $x_1, x_2, \dots, x_k$ справедливо равенство

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}.$$

Пояснение. Суммирование производится по всем решениям уравнения $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ в неотрицательных целых числах. Таким образом, в силу результатов 1.2.4, число слагаемых в данной сумме равно $\overline{C}_k^n$.

Доказательство. Запишем n -ю степень суммы как произведение n множителей, после чего раскроем скобки, не приводя подобных и не меняя порядка множителей:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n &= (x_1 + x_2 + \dots + x_k)(x_1 + x_2 + \dots + x_k) \dots (x_1 + x_2 + \dots + x_k) \\ &= x_1 x_1 \dots x_1 + x_1 x_1 \dots x_2 + \dots x_k x_k \dots x_k. \end{aligned}$$

Если каждое слагаемое рассматривать как n -буквенное "слово", то в полученной сумме присутствуют все "слова" из n букв, в которых каждая буква принимает одно из k значений: $x_1, x_2, \dots, x_k$, причем каждое такое слово встречается ровно один раз. После приведения подобных коэффициент при $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$ будет равен числу n -буквенных слов, в которых буква x_1 встречается n_1 раз, x_2 — n_2 раз, $\dots$, x_k — n_k раз, т.е. числу перестановок с повторениями

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Частным случаем полиномиальной формулы является формула бинома Ньютона

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i x^{n-i} y^i.$$

Действительно, если в полиномиальной формуле положить $k = 2, x_1 = x, x_2 = y, n_2 = i$, то $n_1 = n - i$ и

$$(x + y)^n = \sum_{n_1 + n_2 = n} \frac{n!}{n_1! n_2!} x^{n_1} y^{n_2} = \sum_{i=0}^n C_n^i x^{n-i} y^i.$$

Замечание 2. Другим широко известным частным случаем рассматриваемой формулы является формула квадрата суммы k слагаемых.

Примеры

1. Получить формулу куба суммы трех слагаемых.

Уравнение $n_1 + n_2 + n_3 = 3$ имеет $\overline{C}_3^3 = C_5^3 = 10$ решений в неотрицательных целых числах: $(3, 0, 0), (2, 1, 0), (1, 1, 1)$, а также тройки чисел, получающиеся из указанных перестановками элементов. Таким образом, в формуле три различных полиномиальных коэффициента: $P(3, 0, 0) = 1, P(2, 1, 0) = 3, P(1, 1, 1) = 6$. Искомая формула:

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) + 6xyz.$$

2. В разложении многочлена $(2 - x + x^2)^5$ найти коэффициент при x^5 .

Применяя полиномиальную формулу, получаем:

$$\begin{aligned} (2 - x + x^2)^5 &= \sum_{n_1 + n_2 + n_3 = 5} \frac{5!}{n_1! n_2! n_3!} 2^{n_1} (-x)^{n_2} (x^2)^{n_3} = \\ &= \sum_{n_1 + n_2 + n_3 = 5} \frac{5!}{n_1! n_2! n_3!} 2^{n_1} (-1)^{n_2} x^{n_2 + 2n_3}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для того чтобы определить, какие слагаемые в полученной сумме содержат x^5 , нужно решить в неотрицательных целых числах систему двух линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} n_1 + n_2 + n_3 = 5; \\ n_2 + 2n_3 = 5. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует нечётность n_2 ; в силу неотрицательности переменных n_2 принимает значения: 1, 3 или 5. Все решения системы удобно записать в виде таблицы, к которой припишем столбец значений коэффициентов при x^5 в отвечающих каждому решению слагаемых в (1).

n_1	n_2	n_3	$\frac{5!(-1)^{n_2}2^{n_1}}{n_1!n_2!n_3!}$
2	1	2	-120
1	3	1	-40
0	5	0	-1

Таким образом, коэффициент при x^5 равен $-120 - 40 - 1 = -161$.

Тема 1.4. Комбинаторные тождества

В этом параграфе будет доказан ряд соотношений для биномиальных коэффициентов. Все они интересны сами по себе и многие будут использоваться нами в дальнейшем. Однако не менее интересны *способы* их доказательства (или получения). Мы будем, как правило, предлагать доказательства, исходящие из *комбинаторной природы* соотношений. Общая схема рассуждений здесь такова. Пусть доказывается тождество $f(n, m, \dots) = g(n, m, \dots)$. По виду левой и правой частей реконструируется задача на *подсчет числа комбинаций* определенного вида ($n, m, \dots$ выступают в роли параметров), решая которую одним способом, получаем в качестве ответа $f(n, m, \dots)$, а другим способом — $g(n, m, \dots)$.

В нижеприводимых соотношениях значения параметров предполагаются такими, чтобы все биномиальные коэффициенты имели смысл (например, если в формуле присутствует C_n^k , то предполагается, что $0 \leq k \leq n$).

Имеют место следующие тождества:

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$;	2) $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$;
3) $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$;	4) $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0 (n \geq 1)$;
5) $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} C_n^k = 1$;	6) $C_{m+n}^k = \sum_{s=0}^k C_m^s C_n^{k-s} (m, n \geq k)$;
7) $C_{2n}^m = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$;	8) $k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1}$;
9) $C_n^k C_k^m = C_n^m C_{n-m}^{k-m}$;	10) $\sum_{p=0}^k C_{m+p}^m = C_{m+k+1}^{m+1}$;
11) $\sum_{p=0}^k C_{n+p}^m = C_{n+k+1}^{m+1} - C_n^{m+1}$;	12) $\sum_{k=0}^m C_n^k C_{n-k}^{m-k} = C_n^m \cdot 2^m$.

Доказательство.

1. Каждому k -элементному подмножеству n -элементного множества поставим в соответствие его дополнение до всего множества. Нетрудно видеть, что при этом задается взаимно однозначное соответствие между k -элементными и $n - k$ -элементными подмножествами n -элементного множества. Если между двумя конечными множествами существует взаимно однозначное соответствие, то эти множества содержат одинаковое количество элементов. Таким образом, число сочетаний из n по k совпадает с числом сочетаний из n по $n - k$.
2. Правая часть доказываемого тождества есть число k -элементных подмножеств n -элементного множества. Докажем, что и левая часть есть то же самое. Зафиксируем некоторый элемент n -элементного множества, обозначим его γ . Разобьём все k -элементные подмножества на два семейства: в первое включим подмножества, содержащие γ , а во второе — не содержащие γ . Для того, чтобы сформировать подмножество из первого семейства, нужно из $n - 1$ элемента выбрать $k - 1$, поскольку элемент γ уже входит в это подмножество. Поэтому в первом семействе C_{n-1}^{k-1} подмножеств. Для формирования подмножества из второго семейства надлежит выбрать из $n - 1$ элемента (γ выбирать нельзя!) k элементов; значит, во втором семействе C_{n-1}^k подмножеств. Так как всякое k -элементное подмножество входит ровно в одно из двух семейств, общее число k -элементных подмножеств может быть подсчитано как сумма $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.
3. 2^n — число всех подмножеств n -элементного множества. Так как C_n^k — число всех его k -элементных подмножеств, то просуммировав C_n^k по k от 0 до n , вновь получим общее число всех подмножеств.

Другой способ доказательства состоит в применении формулы бинома Ньютона

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k.$$

Положив в ней $x = 1$, получим требуемое.

4. Тождество доказывается подстановкой в приведенной выше формуле $x = -1$. **Комбинаторное доказательство** может быть получено из решения следующей задачи. Доказать, что четное число элементов

из n -элементного множества может быть выбрано 2^{n-1} способами. Читателю предлагается продумать детали этого доказательства самостоятельно.

5. Данное соотношение является другой формой записи предыдущего тождества.

6. Решим такую задачу.

Имеется m мужчин и n женщин. Из них нужно сформировать делегацию (например, для поездки в Грецию по обмену опытом) из k человек. Каким числом способов это можно сделать?

Ответ очевиден: C_{m+n}^k . Будем классифицировать делегации по числу мужчин. Если в делегацию входят s мужчин и $k-s$ женщин, то мужчин можно выбрать C_m^s способами, а женщин — C_n^{k-s} способами; значит, число делегаций с s мужчинами равно $C_m^s C_n^{k-s}$. Суммируя $C_m^s C_n^{k-s}$ по s от 0 до k , получим общее число делегаций.

7. Для доказательства достаточно в предыдущем соотношении положить $k = m = n$ и применить тождество 1.

8. Доказательство тождества может быть получено из решения следующей задачи:

Каким числом способов можно из n кандидатов выбрать k депутатов и среди последних спикера?

Депутаты выбираются C_n^k способами, после чего спикер выбирается k способами; таким образом, общее число способов равно $C_n^k \cdot k$. То же число можно подсчитать по-другому. Будем сначала (всеобщим голосованием) избирать спикера (из n кандидатов), а затем из оставшихся $n-1$ кандидата — ещё $k-1$ депутата. Указанная процедура может быть выполнена $n \cdot C_{n-1}^{k-1}$ способами. Доказано, что $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$. Отсюда вытекает полезное рекуррентное соотношение $C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$, применяя которое несколько (точнее: k) раз, можно вновь вывести формулу для числа сочетаний:

$$C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1} = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot C_{n-2}^{k-2} = \dots =$$

$$\frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{1} C_{n-k}^0 = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!}.$$

9. Это тождество — обобщение предыдущего (если в 9 положить $m = 1$, то получим 8) и может быть доказано с помощью решения задачи, также являющейся обобщением ранее рассмотренной:

Каким числом способов можно выбрать из n кандидатов k депутатов и среди последних m членов президиума?

10. **1-й способ.** Докажем тождество математической индукцией по k . База индукции. При $k = 0$ имеем:

$$C_m^m = C_{m+1}^{m+1} = 1.$$

Индукционный шаг. Пусть доказываемое утверждение верно при $k = n$: $\sum_{p=0}^n C_{m+p}^m = C_{m+n+1}^{m+1}$. Прибавив к обеим частям равенства C_{m+n+1}^m , получим

$$\sum_{p=0}^{n+1} C_{m+p}^m = C_{m+n+1}^{m+1} + C_{m+n+1}^m = [\text{в силу 2}] = C_{m+n+2}^{m+1}.$$

Таким образом, соотношение 10 справедливо и при $k = n + 1$.

2-й способ. Общее число $m + 1$ -элементных подмножеств множества $\{1, 2, 3, \dots, m + k + 1\}$ равно C_{m+k+1}^{m+1} (правой части доказываемого тождества). Будем классифицировать указанные подмножества по их наибольшему элементу, который, очевидно, принимает значения $m + 1, m + 2, \dots, m + k + 1$. Найдем число подмножеств с наибольшим элементом $m + p + 1$. Поскольку наибольший элемент уже выбран, оставшиеся m элементов выбираются из множества $\{1, 2, \dots, m + p\}$ — значит, число таких подмножеств равно C_{m+p}^m . Суммируя C_{m+p}^m по p от 0 до k , вновь получим общее число $m + 1$ -элементных подмножеств (левую часть доказываемого тождества).

11. Тождество доказывается на основе предыдущего:

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^k C_{n+p}^m &= \sum_{i=m}^{n+k} C_i^m - \sum_{i=m}^{n-1} C_i^m = [p = i - m] = \\ &= \sum_{p=0}^{n+k-m} C_{m+p}^m - \sum_{p=0}^{n-1-m} C_{m+p}^m = C_{n+k+1}^{m+1} - C_n^{m+1}. \end{aligned}$$

12. Решим задачу:

Каким числом способов можно из n кандидатов выбрать m депутатов и среди депутатов некоторых (может быть, всех, а может быть, никого) наградить?

С одной стороны, депутаты выбираются C_n^m способами, а награжденные выделяются 2^m способами (столько подмножеств имеет множество из m элементов), и, значит, ответ к задаче: $C_n^m \cdot 2^m$.

С другой стороны, если число награждаемых депутатов равно k ($0 \leq k \leq m$), то их можно выбрать C_n^k способами, после чего остальные $m - k$ депутатов выбираются C_{n-k}^{m-k} способами. Суммируя $C_n^k C_{n-k}^{m-k}$ по k от 0 до m , вновь получим ответ к рассматриваемой задаче. Тождество доказано.

Тема 1.5. Формула включения-исключения и её применения

1.5.1. Формула включения-исключения

Мощностью конечного множества называется число его элементов. Мощность множества A будем обозначать $|A|$. В этом параграфе мы выведем формулу для мощности объединения конечного числа конечных множеств. В случае двух и трех множеств имеем соответственно:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|;$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Действительно, в сумме $|A| + |B|$ каждый элемент, принадлежащий одновременно и A , и B , учитывается дважды; поэтому после вычитания из $|A| + |B|$ мощности пересечения этих множеств получим в точности число элементов $A \cup B$. Аналогичными рассуждениями обосновывается вторая формула (см. рис. 1).



Рис. 1: Геометрическая иллюстрация формул включения-исключения

В общем случае имеет место следующая

Теорема 3. (Формула включения-исключения)

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — конечные множества. Тогда

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \\ + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \quad (1)$$

Доказательство. Возьмем произвольный элемент из объединения данных n множеств и подсчитаем его "вклад" в правую часть доказываемой формулы. Пусть элемент входит ровно в m множеств A_i ($m \leq n$). Тогда в сумме $\sum |A_i|$ он учитывается m раз, в сумме $\sum |A_i \cap A_j| - C_m^2$ раз (в стольких попарных пересечениях m множеств он содержится), в сумме $\sum |A_i \cap A_j \cap A_k| - C_m^3$ раз и т.д. Общий вклад элемента выражается формулой $m - C_m^2 + C_m^3 - \dots + (-1)^{m-1} C_m^m$ и равен 1 в силу тождества 5 предыдущего параграфа. Таким образом, правая часть (1) равна общему числу элементов из объединения n множеств, что и требовалось доказать.

Замечание. При решении многих задач применяется следующий вариант формулы включения-исключения. Пусть для любого i множество A_i является подмножеством некоторого множества A . Обозначим через $\bar{A}_i$ дополнение к A_i до множества A : $\bar{A}_i = A \setminus A_i$. Как известно, дополнение к объединению множеств есть пересечение их дополнений (это закон де Моргана); поэтому $|\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_n| = |A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)| = |A| - |A_1 \cup \dots \cup A_n|$. Воспользовавшись формулой (1), окончательно получим

$$|\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_n| = |A| - \sum_{i=1}^n |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| - \dots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

1.5.2. Задача о беспорядках и встречах

В популярной литературе по теории вероятностей часто встречается

Задача о рассеянной секретарше. *Секретарше нужно отправить n различных писем по n различным адресам. Она подписывает конверты и случайным образом вкладывает письма в конверты. Какова вероятность того, что ни одно письмо не дойдет до своего адресата?*

Оказывается, искомая вероятность не так мала, как может показаться на первый взгляд, и, что замечательно, имеет пределом (при $n \rightarrow \infty$) $\frac{1}{e} = 0.367879\dots$. Данная задача является (литературным) вариантом широко известной комбинаторной **задачи о беспорядках**, решением которой мы сейчас и займемся.

Перестановка $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ чисел $1, 2, \dots, n$ называется **беспорядком**, если для любого i $a_i \neq i$. Через D_n обозначим число всех беспорядков из n элементов. Заметим, что в задаче о секретарше искомая вероятность P_n равна отношению D_n к общему числу всех перестановок n элементов: $P_n = \frac{D_n}{n!}$.

Пусть $A = \{(a_1, a_2, \dots, a_n)\}$ — множество всех перестановок чисел $1, 2, \dots, n$; $A_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i = i\}$ — множество тех перестановок, у которых на i -м месте стоит число i , $\bar{A}_i = A \setminus A_i$ ($i = 1, \dots, n$). Тогда множество беспорядков совпадает с пересечением множеств $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n$, а D_n равно его мощности. Для того, чтобы применить формулу включения-исключения, нужно найти мощности соответствующих множеств.

Имеем: $|A| = n!$, $\forall i \quad |A_i| = (n-1)!$ (так как во всех перестановках, входящих в A_i , положение одного числа фиксировано, то число таких перестановок совпадает с числом перестановок $n-1$ элементов), если $i \neq j$, то $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$ (здесь фиксированы положения двух элементов); вообще: мощность пересечения k множеств равна $(n-k)!$ (k чисел "знают" свои места, переставляются оставшиеся $n-k$).

Заметим, наконец, что n множеств A_i образуют C_n^2 попарных пересечений, $\dots$, C_n^k пересечений по k множеств ($k \leq n$). Таким образом,

$$\begin{aligned}
 D_n &= |\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_n| = |A| - \sum_{i=1}^n |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| - \dots + \\
 &(-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| = \\
 n! - C_n^1(n-1)! + C_n^2(n-2)! - \dots + (-1)^k C_n^k(n-k)! + \dots + (-1)^n C_n^n(n-n)! &= \\
 \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k(n-k)! &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} (n-k)! = \\
 \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!} &= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right). \quad (1)
 \end{aligned}$$

Возвратимся (в последний раз) к задаче о секретарше. Из полученной формулы для числа беспорядков следует:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) = e^{-1}.$$

Рекуррентные формулы для числа беспорядков. На основе формулы (1) получим интересные соотношения для D_n .

$$D_{n+1} = (n+1)! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} + (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} \right) =$$

$$(-1)^{n+1} + (n+1)n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) = (-1)^{n+1} + (n+1)D_n. \quad (2)$$

Полученное рекуррентное соотношение $D_{n+1} = (-1)^{n+1} + (n+1)D_n$ очень похоже на соотношение, позволяющее рекуррентно вычислять факториалы: $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ (всё отличие — слагаемое $(-1)^{n+1}$). В связи с этим обстоятельством число беспорядков D_n иногда называют **субфакториалом** (или **псевдофакториалом**). Зная, что $D_1 = 0$, с помощью (2) найдем несколько значений D_n :

$$D_2 = 1; \quad D_3 = 3 \cdot 1 - 1 = 2; \quad D_4 = 4 \cdot 2 + 1 = 9; \quad D_5 = 5 \cdot 9 - 1 = 44.$$

Ещё одно соотношение получается так:

$$D_{n+2} = (n+2)D_{n+1} + (-1)^{n+2} = (n+1)D_{n+1} + (-1)^{n+2} + D_{n+1} =$$

$$= (n+1)D_{n+1} + (-1)^{n+2} + (n+1)D_n + (-1)^{n+1} = (n+1)(D_{n+1} + D_n).$$

Заметим, что рекуррентной зависимости $a_{n+2} = (n+1)(a_{n+1} + a_n)$ наряду с последовательностью псевдофакториалов D_n удовлетворяет и последовательность (обычных) факториалов $n!$ (убедитесь в этом самостоятельно).

Обобщением задачи о беспорядках является **задача о встречах**. Говорят, что перестановка $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ чисел $1, 2, \dots, n$ имеет k встреч, если ровно k чисел "остаются на своих местах" (когда порядковый номер элемента в перестановке совпадает с его величиной: $a_i = i$). Число перестановок n элементов с k встречами обозначим $D_{n,k}$. Отметим несколько частных случаев: $D_{n,0} = D_n$; $D_{n,n} = 1$; $D_{n,n-1} = 0$. Последнее равенство вытекает из того, что если все элементы перестановки, кроме одного, занимают "свои" места, то и этому элементу не остается ничего другого, как занять место, чей номер совпадает с ним, и, таким образом, *ровно* $n - 1$ встреч не может быть!

Каждую перестановку n элементов с k встречами можно сгенерировать, выполняя следующую процедуру.

1. Выбрать k элементов, остающихся на своих местах.
2. Оставшиеся $n - k$ элементов переставить так, чтобы ни один из них не занял "своего" места.

Первый шаг выполняется C_n^k способами, второй — D_{n-k} способами. С помощью правила произведения получаем формулу для числа встреч

$$D_{n,k} = C_n^k D_{n-k}.$$

1.5.3. Число сюръекций

Пусть X и Y — некоторые множества. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется **сюръекцией**, если всякий элемент множества Y является образом некоторого элемента множества X :

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad f(x) = y.$$

Определим **образ множества** при заданном отображении как множество образов всех его элементов: $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$. Отображение $f : X \rightarrow Y$ является сюръекцией тогда и только тогда, когда $f(X) = Y$.

Пусть X и Y — конечные множества: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, причем $n \geq m$. Найдем число всех сюръекций $f : X \rightarrow Y$.

Введем в рассмотрение следующие множества:

$A = \{f : X \rightarrow Y\}$ — множество всех отображений из X в Y ;

$F = \{f : X \rightarrow Y \mid f(X) = Y\}$ — множество всех сюръекций;

$A_i = \{f : X \rightarrow Y \mid y_i \notin f(X)\}$,

$\bar{A}_i = A \setminus A_i = \{f : X \rightarrow Y \mid y_i \in f(X)\}$ ($i = 1, \dots, m$).

Легко видеть, что $F = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_m$. Вновь находит применение формула включения-исключения!

Каждое отображение $f : X \rightarrow Y$ можно задать размещением (с повторениями) объема $n : (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$. Для отображений $f \in A$ элементы указанного размещения выбираются из m -элементного множества Y ; для $f \in A_i$ — из $m - 1$ -элементного множества $Y \setminus \{y_i\}$; для $f \in A_i \cap A_j$ ($i \neq j$) — из $m - 2$ -элементного множества $Y \setminus \{y_i, y_j\}$ и т.д. Формула для числа размещений с повторениями уже известна читателю; применив ее, получим $|A| = m^n$; $|A_i| = (m - 1)^n$; $|A_i \cap A_j| = (m - 2)^n$; ... Таким образом,

$$\begin{aligned} |F| &= |\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_m| = |A| - \sum_{i=1}^m |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j| - \dots + \\ &+ (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| + \dots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m| = \\ &= m^n - m \cdot (m - 1)^n + C_m^2 (m - 2)^n - \dots + (-1)^{m-1} \cdot C_m^{m-1} \cdot 1^n. \end{aligned}$$

Итак, число сюръекций n -элементного множества в m -элементное множество равно

$$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_m^k (m-k)^n.$$

Пример. n различных шаров нужно разместить по m различным ящикам так, чтобы ни один ящик не остался пустым. Каким числом способов это можно сделать?

Решение. Распределение шаров по ящикам можно рассматривать как отображение множества шаров в множество ящиков; отсутствие пустых ящиков соответствует тому, что указанное отображение является сюръекцией. Число сюръекций подсчитано выше.

1.5.4. Обобщение формулы включения-исключения

Пусть A — некоторое множество, $A_1, A_2, \dots, A_n$ — его подмножества. Определим функцию $w(n)$ следующими соотношениями:

$$w(0) = |A|, \quad w(1) = \sum_{i=1}^n |A_i|, \quad w(k) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| \quad (k \leq n).$$

Пусть $N(r)$ — число элементов множества A , которые принадлежат ровно r различным множествам A_i (если $r = 0$, то — ни одному). С помощью введенных функций формула включения-исключения принимает следующий вид:

$$N(0) = w(0) - w(1) + w(2) - \dots + (-1)^n w(n).$$

В этом параграфе мы докажем, что имеет место и более общее соотношение:

$$N(r) = w(r) - C_{r+1}^1 w(r+1) + C_{r+2}^2 w(r+2) - \dots + (-1)^{n-r} C_n^{n-r} w(n). \quad (1)$$

Доказательство. Возьмем произвольный элемент множества A и подсчитаем его "вклад" в правую часть доказываемого равенства. Возможны следующие 3 случая:

- 1) элемент входит менее, чем в r различных множеств A_i , тогда он не принадлежит никакому пересечению r и более упомянутых множеств и вклад его в правую часть (1) равен нулю;

- 2) элемент принадлежит *ровно* r множествам A_i , тогда он принадлежит ровно одному пересечению r множеств и не принадлежит никакому пересечению большего числа множеств; таким образом, вклад элемента равен 1;
- 3) элемент принадлежит k множествам A_i , причем $k > r$. Тогда он входит в C_k^r пересечений r множеств A_i , в C_k^{r+1} пересечений $r+1$ множеств A_i , в C_k^j пересечений j множеств A_i ($j \leq k$). Вклад указанного элемента в правую часть (1) равен

$$\sum_{j=r}^k (-1)^{j-r} C_j^{j-r} C_k^j = [\text{в силу комбинаторного тождества 1}] =$$

$$\sum_{j=r}^k (-1)^{j-r} C_j^r C_k^j = [\text{в силу 9}] = \sum_{j=r}^k (-1)^{j-r} C_k^r C_{k-r}^{j-r} =$$

$$[i = j - r] = C_k^r \sum_{i=0}^{k-r} (-1)^i C_{k-r}^i = [\text{в силу 4}] = 0.$$

Таким образом, формула из правой части (1) дает число элементов A , входящих ровно в r подмножеств A_i . Это и требовалось доказать.

Пример. Из 100 студентов 60 читают журнал A , 50 читают журнал B , 50 — C , 30 — A и B , 20 — B и C , 40 — A и C , 10 — A , B и C . Сколько студентов не читает ни один из трех журналов? Сколько студентов читает ровно два журнала?

Решение. В данной задаче в роли исходного множества A выступает множество из 100 студентов, подмножества A_1, A_2, A_3 составляют студенты, читающие соответствующие журналы. Имеем: $w(0) = 100$; $w(1) = 60 + 50 + 50 = 160$; $w(2) = 30 + 20 + 40 = 90$; $w(3) = 10$. Тогда $N(0) = w(0) - w(1) + w(2) - w(3) = 20$; $N(2) = w(2) - C_3^1 w(3) = 90 - 3 \cdot 10 = 60$.

Ответ: 20 человек не читает журналов, 60 человек читает по два журнала.

Тема 1.6. Линейные рекуррентные уравнения

Пусть последовательность $x_0, x_1, x_2, \dots$ удовлетворяет следующему соотношению

$$\forall n \in N_0 \quad x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + \dots + a_k x_n = 0, \quad a_k \neq 0, \quad (1)$$

где $a_1, \dots, a_k$ — некоторые числа.

При заданных значениях $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ формула (1) полностью определяет последовательность; каждый ее элемент, начиная с k -го, является линейной комбинацией предыдущих k элементов с коэффициентами a_i ; поэтому формулу (1) называют *линейным рекуррентным соотношением k -го порядка*.

1.6.1. Решение линейных рекуррентных уравнений

Как перейти от рекуррентного задания последовательности к формуле, выражающей зависимость общего члена последовательности x_n от его номера n ? Сначала рассмотрим простейший случай.

Теорема 4. Пусть последовательность (x_n) удовлетворяет соотношению

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n;$$

уравнение $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$ имеет два различных ненулевых корня λ_1 и λ_2 . Тогда имеет место тождество

$$x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$$

для некоторых c_1 и c_2 , однозначно определяемых по x_1 и x_2 .

Доказательство. Числа c_1 и c_2 определим, решая систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = x_1; \\ c_1\lambda_1^2 + c_2\lambda_2^2 = x_2. \end{cases} \quad (2)$$

Несложно проверить, что если $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то система (2) имеет, и при том единственное, решение. Доказывая теорему по индукции, предположим, что $x_{k-1} = c_1\lambda_1^{k-1} + c_2\lambda_2^{k-1}$ и $x_k = c_1\lambda_1^k + c_2\lambda_2^k$. Тогда

$$x_{k+1} = ax_k + bx_{k-1} = c_1\lambda_1^{k-1}(a\lambda_1 + b) + c_2\lambda_2^{k-1}(a\lambda_2 + b) = c_1\lambda_1^{k+1} + c_2\lambda_2^{k+1},$$

что и требовалось доказать. $\square$

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 5. Пусть n -й член последовательности задается формулой

$$x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n, \quad \text{где } \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Тогда для последовательности имеет место рекуррентное соотношение

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n, \quad \text{где } a = \lambda_1 + \lambda_2, \quad b = -\lambda_1\lambda_2.$$

Доказательство. Числа λ_1 и λ_2 по теореме, обратной к теореме Виета, удовлетворяют уравнению $\lambda^2 = a\lambda + b$. Поэтому

$$x_{n+2} = c_1\lambda_1^{n+2} + c_2\lambda_2^{n+2} = c_1\lambda_1^n(a\lambda_1 + b) + c_2\lambda_2^n(a\lambda_2 + b) = ax_{n+1} + bx_n.$$

В общем случае член последовательности x_n , удовлетворяющей линейному рекуррентному соотношению k -го порядка

$$x_{n+k} + a_1x_{n+k-1} + \dots + a_kx_n = 0,$$

имеет вид

$$x_n = \sum_{i=1}^s \lambda_i^n P_i(n),$$

где для $i = 1, \dots, s$ λ_i — корень кратности r_i характеристического многочлена рекуррентного соотношения

$$f(\lambda) = \lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \dots + a_k,$$

$P_i(n)$ — многочлен степени, не превосходящей $r_i - 1$. Конкретный вид указанных многочленов определяется первыми k членами последовательности: $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$. В частности, если все корни характеристического многочлена — *простые* (т.е. кратности 1), то последовательность (x_n) представима в виде суммы геометрических прогрессий:

$$\forall n \in N_0 \quad x_n = \sum_{i=1}^k c_i \lambda_i^n,$$

где c_i — некоторые константы.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Найдём все последовательности, удовлетворяющие условию

$$\forall n \in N_0 \quad x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n. \quad (3)$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет двукратный корень: $\lambda_{1,2} = 1$. поэтому общий член последовательности имеет вид: $x_n = (an + b) \cdot 1^n = an + b$, где константы a и b определяются первыми двумя членами последовательности. Таким образом, (x_n) — арифметическая прогрессия. Этот результат можно было предвидеть, заметив, что соотношение (3) является характеристическим для арифметической прогрессии: каждый член последовательности, начиная со второго, есть среднее арифметическое его соседних членов.

2. Найдём последовательность (x_n) , задаваемую соотношениями

$$x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 6, \quad \forall n \in N_0 \quad x_{n+3} = 4x_{n+2} - 5x_{n+1} + 2x_n.$$

Разложим характеристический многочлен на множители:

$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$. Вид n -го члена последовательности: $x_n = (an + b) + c \cdot 2^n$. Константы a, b, c найдём из системы уравнений $x_0 = b + c = 1$; $x_1 = a + b + 2c = 3$; $x_2 = 2a + b + 4c = 6$.

Ответ: $x_n = n + 2^n$.

1.6.2. Числа Фибоначчи

Последовательность *чисел Фибоначчи* задается соотношениями

$$f_0 = 0, f_1 = 1, \quad \forall n \in N_0 \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. Его корни $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; формула общего члена:

$$f_n = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Коэффициенты c_1 и c_2 определим из "начальных условий":

$$f_0 = c_1 + c_2 = 0, \quad f_1 = c_1 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1.$$

Решив систему двух уравнений с двумя неизвестными, получим окончательный результат:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Полученную формулу называют формулой Бинэ. Из неё, в частности, следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618...; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0,618...$$

Число $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618...$ называют *золотым сечением*; оно выражает собой пропорцию, которая использовалась греками при строительстве Парфенона, египтянами — Великой пирамиды в Гизе. Известно мнемоническое

правило, позволяющее запомнить первые цифры десятичной записи этого числа по количеству букв в словах предложения "А фигура я красивая".

Числа Фибоначчи известны с XIII века. Об их приложениях к различным задачам, в частности, к задачам оптимизации см. [6]. Для прогнозирования периодов колебания цен на валютной бирже Элиот разработал теорию волн, в основу которой легли свойства чисел Фибоначчи.

Раздел 2. Теория графов

Короткая историческая справка. Историки математики считают, что теория графов родилась в 1736 г., когда Леонард Эйлер решил задачу о кенигсбергских мостах (см. 2.3.). В середине XIX века Г. Кирхгоф ввел понятие *дерева* (2.4.) и применил его для исследования электрических цепей. Тогда же А. Кэли использовал аппарат деревьев, описывая строение углеводов.

В настоящее время теория графов переживает период бурного развития, находя себе применение при решении многочисленных задач науки и техники.

Тема 2.1. Определения и примеры

2.1.1. Понятие графа

Простым графом называется упорядоченная пара $G = \langle V, E \rangle$, где

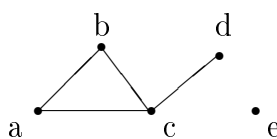
V — непустое конечное множество (элементы V — **вершины графа**);

E — конечное множество неупорядоченных пар различных элементов V (элементы E — **рёбра графа**).

Поясним выбор обозначений для множеств вершин и рёбер. По-английски вершина — vertex, ребро — edge.

Графы удобно представлять рисунками, в которых вершины изображаются точками, а рёбра — линиями, соединяющими соответствующие точки. Сам термин *граф* возник как сокращение слова graphic (график) и был введен в 1936 г. венгерским математиком Д. Кенигом.

Например, на рисунке



изображен простой граф с множеством вершин $V = \{a, b, c, d, e\}$ и множеством рёбер $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$.

Граф — упорядоченная пара $G = \langle V, E \rangle$, где

V — непустое конечное множество (элементы V — **вершины** графа);

E — конечное **мультимножество** неупорядоченных пар элементов V (необязательно различных) (элементы E — **рёбра**).

Термин **мультимножество** говорит о том, что элементы в E могут повторяться; повторяющиеся элементы называют **кратными рёбрами**.

Если в графе имеется ребро $e = uv$, то говорят:

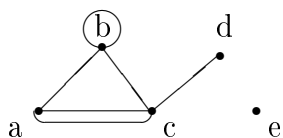
вершины u и v — **смежные**, или

ребро e **инцидентно** вершинам u и v ; вершины u и v инцидентны ребру e , или

ребро e **соединяет** вершины u и v , или

вершины u и v — **концы** ребра e .

Два различных ребра называются **смежными**, если они имеют, по крайней мере, одну общую вершину. На рисунке



изображен граф с множеством вершин $V = \{a, b, c, d, e\}$ и мультимножеством рёбер $E : ab, ac, ac, bc, bb, cd$.

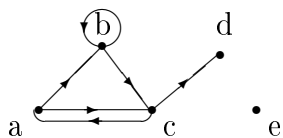
Ребро вида uu (соединяющее некоторую вершину саму с собой) называют **петлёй**. Таким образом, простой граф — это граф без петель и кратных рёбер.

Ориентированный граф — упорядоченная пара $G = \langle V, A \rangle$, где

V — непустое конечное множество — множество вершин;

A — конечное мультимножество **упорядоченных** пар элементов V (необязательно различных) — мультимножество **дуг** (A — первая буква слова arc — дуга (англ.)).

На рисунке



изображен граф с множеством вершин $V = \{a, b, c, d, e\}$ и мультимножеством дуг $A : (a, b), (a, c), (c, a), (b, c), (b, b), (c, d)$. К ориентированным графам мы вернёмся лишь в конце данной главы.

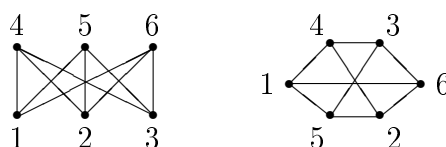
Степенью вершины графа называется число инцидентных ей рёбер. При подсчёте степени вершины петлю будем учитывать дважды. Обозначение степени вершины v : $\rho(v)$. Вершина v называется **изолированной**, если $\rho(v) = 0$, и **висячей**, если $\rho(v) = 1$. Имеет место следующее простое утверждение.

Теорема 6. (Лемма о рукопожатиях) Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу рёбер: $\sum_{v \in V} \rho(v) = 2|E|$.

Действительно, каждое ребро дает вклад 2 при подсчёте суммы степеней всех вершин. В частности, если несколько человек обменялись рукопожатиями, то общее число рукопожатий будет чётным (графовая модель для данной задачи очевидна).

Следствие. В любом графе число вершин нечётной степени чётно.

Графы $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ и $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ называются **изоморфными**, если существует такое взаимно однозначное соответствие $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$, при котором для любых двух вершин первого графа $u, v \in V_1$ число соединяющих их рёбер равно числу рёбер, соединяющих соответствующие им вершины второго графа $\varphi(u), \varphi(v)$. На следующем рисунке изображены изоморфные графы (соответствующие друг другу вершины в них обозначены одинаковыми номерами).

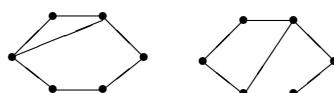


Представим себе, что рёбра графа — гибкие резиновые нити. Если от одного графа передвижением вершин (не разрывая нити) можно перейти к другому графу, то эти графы изоморфны. На следующих двух иллюстрациях показано, как графы передвижением вершин (с сохранением связей между ними) переходят в изоморфные им графы.

Иллюстрация 1

Иллюстрация 2

Ясно, что в изоморфных графах одинаковое число вершин, рёбер (а также петель и кратных рёбер). Однако данное условие не является достаточным для изоморфности. Два графа, изображенные ниже,

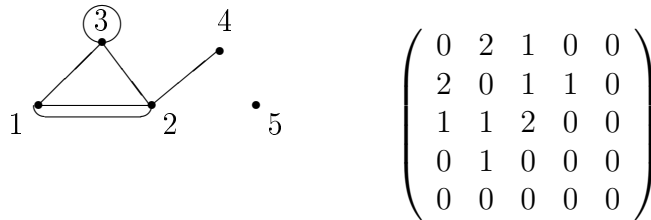


не являются изоморфными (хотя бы потому, что в одном графе имеется "треугольник", а во втором — нет).

Отношение изоморфизма графов обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, т.е. является отношением эквивалентности.

Граф $G' = \langle V', E' \rangle$ называют **подграфом** графа $G = \langle V, E \rangle$ (обозначение $G' \subset G$), если $V' \subset V$, $E' \subset E$. Заметим, что если G_1 и G_2 — изоморфные графы, то для любого подграфа G_1 найдется изоморфный ему граф, являющийся подграфом G_2 .

Порядок графа — число его вершин. Граф порядка n называется помеченным, если его вершинам присвоены **метки** — числа от 1 до n (причем у разных вершин — разные метки). Часто мы будем отождествлять вершину с ее меткой. **Матрицей смежности** помеченного графа называется матрица $A = (a_{ij})$, где a_{ij} — число рёбер, соединяющих вершины i и j . Ниже изображен помеченный граф 5-го порядка и приведена его матрица смежности.



Свойства матрицы смежности

1. Каждый элемент матрицы — неотрицательное целое число.
2. Матрица является симметричной: $A^T = A$ (символ T означает операцию транспонирования).
3. Сумма элементов i -й строки равна степени вершины i : $\sum_j a_{ij} = \rho(i)$.
4. Пусть A и A' — матрицы смежности изоморфных графов. Тогда найдется такая матрица перестановок P , что $A' = PAP^{-1}$. **Матрица перестановок** — матрица, в каждой строке и каждом столбце которой находится ровно по одной единице, а остальные элементы нули.

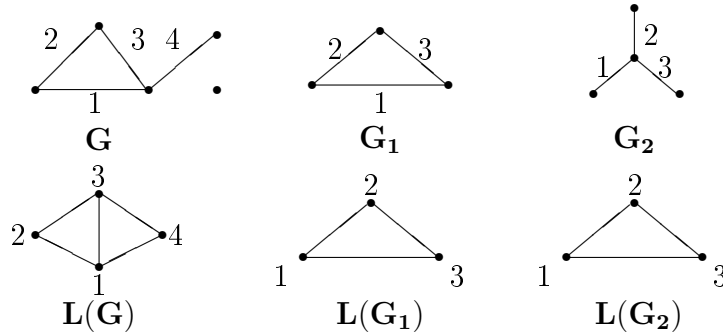
Первые три свойства очевидны; докажем последнее свойство. Пусть φ — функция, устанавливающая изоморфное соответствие между графами G и G' с матрицами смежности соответственно A и A' :

$$\forall i, j \quad a'_{\varphi(i), \varphi(j)} = a_{ij}. \quad (1)$$

Сформируем матрицу P следующим образом: в i -й строке поставим единицу в $\varphi(i)$ -й столбец. Тогда умножение любой матрицы (соответствующей

размерности) слева на P приводит к такой перестановке ее строк, что i -й строкой становится строка с номером $\varphi(i)$ матрицы A ($i = 1, \dots, n$; n – порядок графа). Легко проверить, что матрица, обратная к матрице перестановок, совпадает с транспонированной к ней: $P^{-1} = P^T$. Умножение матрицы справа на P^T приводит к такой перестановке ее столбцов, что j -м столбцом становится столбец с номером $\varphi(j)$ данной матрицы ($j = 1, \dots, n$). Таким образом, число, стоявшее в i -й строке и j -м столбце матрицы A , будет находиться в $\varphi(i)$ -й строке и $\varphi(j)$ -м столбце матрицы PAP^{-1} ($i, j = 1, \dots, n$). В силу (1) отсюда и вытекает требуемое: $A' = PAP^{-1}$.

Рёберным графом $L(G)$ графа G называется граф, множество вершин которого находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством рёбер G , причем две вершины в $L(G)$ смежны тогда и только тогда, когда смежны соответствующие им рёбра графа G . Примеры рёберных графов см. на рисунках,



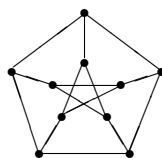
где рёбра графов G, G_1, G_2 помечены теми же номерами, которые имеют соответствующие им вершины рёберных графов. Очевидно, что из изоморфности графов вытекает изоморфность их рёберных графов. Обратное, вообще говоря, неверно (см. примеры). Оказывается, что приведенный контрпример является единственным исключением: из связных графов только G_1 и G_2 , будучи неизоморфными, имеют изоморфные рёберные графы [17].

Граф, в котором нет рёбер, называют **пустым**. Пустой граф порядка n будем обозначать N_n . Все вершины пустого графа являются изолированными.

Простой граф, в котором любые две вершины смежны, называют **полным**. Обозначение полного графа порядка n : K_n . Число рёбер в K_n равно $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

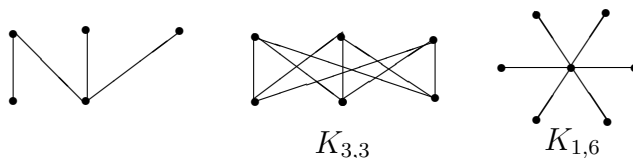
Граф называется **регулярным степени r** , если степени всех его вершин равны r . Графы K_n и N_n являются регулярными, их степени соответственно $n - 1$ и 0 . Регулярный граф степени 3 называют **кубическим**.

В частности, кубическим будет граф, вершины и рёбра которого соответствуют вершинам и рёбрам куба. Кубическим является и **граф Петерсена**, изображенный на рисунке.



Платоновыми графами называют графы, образованные вершинами и рёбрами платоновых тел — правильных многогранников. Все они являются регулярными.

Граф называется **двудольным**, если множество его вершин V представимо в виде объединения двух непересекающихся непустых множеств V_1 и V_2 , и при этом каждое ребро графа соединяет какую-либо вершину из V_1 с какой-либо вершиной из V_2 . Множества вершин V_1 и V_2 будем называть **долями** графа. Заметим, что вершины двудольного графа можно "раскрасить" (т.е. каждой вершине приписать некоторый цвет) в два цвета так, что каждое ребро будет иметь концы разного цвета (вершины одного цвета будут при этом составлять одну долю). **Полным двудольным графом** $K_{n,m}$ называется двудольный граф, в котором доли имеют соответственно n и m вершин, и любые две вершины, входящие в разные доли, смежны. $K_{n,m}$ содержит nm рёбер. **Звёздным** называют граф $K_{1,n}$. В нём n висячих вершин и одна вершина степени n . На рисунке изображены двудольные графы.



Операции над графами

Объединением графов $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ и $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ называется граф $G_1 \cup G_2 = \langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \rangle$. Объединение графов — **дизъюнктное**, если объединяемые графы не имеют общих вершин: $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Очевидно, что операция объединения графов ассоциативна; поэтому употребление записей вида $G_1 \cup G_2 \cup G_3$ или $\cup_i G_i$ не будет приводить к недоразумениям.

Соединение графов $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ и $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ — граф $G_1 + G_2$, который получается из дизъюнктного объединения графов $G_1 \cup G_2$ добав-

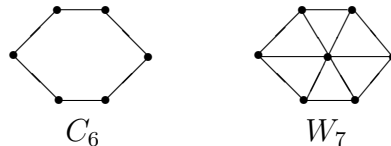
лением всевозможных рёбер вида v_1v_2 , где $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$. Например, $N_n + N_m = K_{n,m}$.

Дополнением к простому графу $G = \langle V, E \rangle$ называют граф $\bar{G} = \langle V, \bar{E} \rangle$, в котором множество вершин совпадает с множеством вершин исходного графа G , и вершины смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в графе G . Например, $\bar{N}_n = K_n$, $\bar{K}_n = N_n$. Несложно видеть, что дополнение к дополнению G совпадает с G : $\bar{\bar{G}} = G$. Если граф G с n вершинами рассматривать как подграф полного графа K_n , то можно сказать, что граф $\bar{G}$ получается из K_n выбрасыванием рёбер графа G . Отметим также, что дополнение к регулярному графу есть регулярный граф.

Граф называется **связным**, если его нельзя представить в виде дизъюнктного объединения двух графов и **несвязным** в противном случае. Любой граф можно представить в виде дизъюнктного объединения связных графов, каждый из которых называют **компонентой связности** исходного графа. На рисунке граф G_2 — связный, граф G_1 — несвязный (содержит 3 компоненты связности).



Циклический граф — это связный регулярный граф степени 2. Циклический граф порядка n обозначают C_n . Граф $W_n = N_1 + C_{n-1}$ ($n \geq 3$) называют **колесом**.



2.1.2. Связность

Маршрутом в графе называется последовательность рёбер вида

$$v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{m-1}v_m.$$

Каждому маршруту соответствует последовательность его вершин $v_0, v_1, \dots, v_m$; v_0 называют **начальной вершиной** маршрута, а v_m — **конечной вершиной**; при этом говорят о **маршруте из v_0 в v_m** . Маршрут удобно обозначать в следующем виде:

$$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_m.$$

Длиной маршрута называется число входящих в него рёбер. **Тривиальный маршрут** имеет длину 0 (он не содержит рёбер и определяется начальной вершиной v_0).

Маршрут называется **цепью**, если все его ребра различны, и **простой цепью**, если все его вершины различны, за исключением, может быть, начальной и конечной. Если в цепи $v_0 = v_m$, то цепь называют **замкнутой**.

Цикл в графе — замкнутая цепь, содержащая по крайней мере одно ребро.

Две вершины графа u и v назовем **связанными**, если в графе существует маршрут из u в v . Заметим, что если две вершины связаны, то существует соединяющая их простая цепь. Действительно, пусть имеется некоторый маршрут из u в v , не являющийся простой цепью, тогда найдется вершина маршрута w , встречающаяся в нем не менее двух раз, и маршрут имеет вид

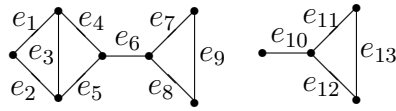
$$u \rightarrow \dots \rightarrow w \rightarrow w_1 \rightarrow \dots \rightarrow w \rightarrow \dots \rightarrow v.$$

Удалив из маршрута участок $w_1 \rightarrow \dots \rightarrow w$, вновь получим маршрут из u в v . Если при этом он не будет простой цепью, то указанную процедуру можно повторить. Бесконечное число раз она выполняться не будет, так как число рёбер графа конечно. В результате получим простую цепь из u в v .

Отношение связности на множестве вершин графа является отношением эквивалентности. Рефлексивность проистекает из того факта, что каждая вершина связана сама с собой тривиальным маршрутом. Симметричность следует из того, что взяв вершины маршрута из u в v в обратном порядке, получим маршрут из v в u . Транзитивность также очевидна: объединив маршруты из u в v и из v в w , получим маршрут из u в w .

Отношение связности разбивает множество вершин графа на классы эквивалентности. Очевидно, что вершины из одного класса эквивалентности вместе с соединяющими их рёбрами образуют компоненту связности графа (определение которой дано в конце предыдущего параграфа). Поскольку связный граф характеризуется тем, что имеет одну компоненту связности, приходим к выводу: *граф является связным тогда и только тогда, когда любые две его вершины — связанные.*

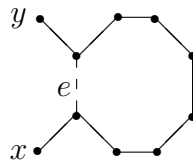
Разделяющим множеством графа называется такое множество его рёбер, удаление которых приводит к увеличению числа компонент связности графа. **Разрез** — минимальное разделяющее множество (т.е. такое, что никакое его собственное подмножество не является разделяющим множеством). Ребро — **мостом**, если оно образует разрез.



Примеры. Для графа, изображенного на рисунке, $\{e_1, e_2, e_3\}$ — разделяющее множество (но не разрез); $\{e_1, e_2\}$ — разрез; рёбра e_6 и e_{10} являются мостами.

Лемма 1. *Ребро в графе является мостом тогда и только тогда, когда оно не входит ни в один цикл.*

Доказательство. Пусть ребро $e = uv$ — мост. Ясно, что при этом $u \neq v$. Предположим существование цикла, содержащего ребро e . Возьмем две произвольные вершины x и y из той компоненты связности графа, которой принадлежит ребро e . Покажем, что они останутся связанными и после удаления ребра e . Действительно, если ребро e входит в некоторый маршрут, соединяющий x и y , то e можно заменить последовательностью рёбер, составляющих вместе с e цикл (см. рисунок).



Таким образом, отношение связности не меняется после удаления e , что противоречит определению моста.

Обратно. Пусть ребро $e = uv$ не входит ни в один цикл. Если при удалении e вершины u и v останутся связанными, это будет говорить о существовании соединяющей их простой цепи. Объединив ее с ребром e , получим цикл в исходном графе — противоречие! Таким образом, число компонент связности при удалении e увеличивается; e — мост.

Следующее утверждение уточняет понятие моста.

Лемма 2. *Удаление моста увеличивает число компонент связности графа на единицу.*

Доказательство. Пусть $e = uv$ — мост. Рассмотрим компоненту связности, содержащую e . Через H_u обозначим множество ее вершин x , для которых существует маршрут из x в u , не содержащий ребра e . Остальные вершины составят множество H_v . Эти множества не пусты, так как $u \in H_u$ (вершина u связана сама с собой тривиальным маршрутом) и $v \in H_v$ (если бы существовал маршрут из v в u , не содержащий ребра e , то добавив к нему это ребро, получили бы цикл, что противоречит лемме 1.). Удалим

из графа ребро e . Любые две вершины x, y из H_u останутся связанными между собой маршрутом вида $x \rightarrow \dots \rightarrow u \rightarrow \dots \rightarrow y$. Для произвольных вершин z, t из H_v любые простые цепи, связывающие их с вершиной u в исходном графе, заканчивались ребром $e = uv$; значит, после удаления этого ребра z и t связаны маршрутом вида $z \rightarrow \dots \rightarrow v \rightarrow \dots \rightarrow t$. Таким образом, удаление e привело к образованию двух компонент связности (с множествами вершин H_u и H_v). Лемма доказана.

Теорема 7. Пусть в простом графе n вершин, m рёбер и k компонент связности. Тогда справедливы неравенства $n - k \leq m \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$.

Неравенство $n - k \leq m$ будем доказывать индукцией по числу рёбер. *База индукции.* При $m = 0$ $n = k$ — неравенство выполняется. *Индукционный шаг.* Предположим, что доказываемое неравенство справедливо для всех графов с s рёбрами, где $s < m$. Будем в графе с n вершинами, m рёбрами и k компонентами связности последовательно удалять рёбра так, чтобы не изменялось число компонент связности, до тех пор, пока это возможно. В результате получим граф с прежним количеством вершин и компонент связности и $m' \leq m$ рёбрами, причем каждое ребро будет мостом. Удалим ещё одно ребро. В силу леммы 2, число компонент связности станет равным $k + 1$. Так как граф будет иметь $m' - 1 \leq m - 1 < m$ рёбер, к нему применимо предположение индукции: $n - (k + 1) \leq m' - 1$. Стало быть, $n - k \leq m'$, и так как $m' \leq m$, то $n - k \leq m$, что и требовалось доказать.

Для того, чтобы оценить сверху число рёбер графа через число его вершин и компонент связности, дополним каждую компоненту связности графа до полного графа. Граф после этого будет представлять собой дизъюнктивное объединение полных графов $G_1 \cup \dots \cup G_k$. Пусть в i -й компоненте n_i вершин ($i = 1, \dots, k$). Можно ли ещё увеличить число рёбер, не меняя при этом числа вершин и компонент связности? Можно, если найдутся две компоненты, в каждой из которых не менее двух вершин. Пусть $2 \leq n_i \leq n_j$. "Отберем" одну вершину у G_i (потеряв при этом $n_i - 1$ рёбер) и "передадим" ее графу G_j (приобретя зато n_j рёбер). Количество рёбер увеличится на величину $n_j - (n_i - 1) = n_j - n_i + 1 \geq 1$. Повторяя описанную процедуру, пока это возможно, придем в конце концов к графу с $k - 1$ изолированными вершинами и компонентой связности, представляющей собой полный граф с $n - k + 1$ вершинами. Полученный граф имеет $\frac{(n-k+1)(n-k)}{2}$ рёбер. Поскольку при каждом проведенном преобразовании число рёбер возрастало, получим требуемое соотношение: $m \leq \frac{(n-k+1)(n-k)}{2}$; причем равенство достигается только для дизъюнктивного объединения полного графа и пустых графов.

Следствие. Если в простом графе n вершин и m рёбер и $m > \frac{(n-1)(n-2)}{2}$,

то граф *связен*.

Действительно, если бы граф не был связан и число его компонент $k \geq 2$, то число рёбер удовлетворяло бы неравенству $m \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, что противоречит условию.

2.1.3. Метрические характеристики

Пусть $G = \langle V, E \rangle$ — связный граф. Через $d(u, v)$ обозначим длину кратчайшей цепи, связывающей вершины u и v . Покажем, что $d(u, v)$ обладает свойствами **метрики**.

Симметричность. $\forall u, v \in V \quad d(u, v) = d(v, u)$. Свойство очевидно.

Неравенство треугольника. $\forall u, v, w \in V \quad d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$.

Действительно, объединив кратчайшие цепи из u в w и из w в v , получим маршрут из u в v длиной $d(u, w) + d(w, v)$, длина кратчайшей цепи из u в v будет не более этой величины.

Невырожденность. $\forall u, v \in V \quad d(u, v) \geq 0; \quad d(u, v) = 0 \iff u = v$.
Непосредственно вытекает из определения $d(u, v)$.

Таким образом, на множестве вершин связного графа введена структура **метрического пространства**. $d(u, v)$ будем называть **расстоянием** между вершинами u и v .

Эксцентриситетом вершины u называется наибольшее из расстояний от u до других вершин графа: $e(u) = \max_{v \in V} d(u, v)$.

Минимальный эксцентриситет вершин графа называют **радиусом графа**: $r(G) = \min_{u \in V} e(u)$, а максимальный эксцентриситет — **диаметром**: $d(G) = \max_{u \in V} e(u)$. Другими словами, диаметр графа — это наибольшее из расстояний между двумя вершинами графа. Если эксцентриситет вершины совпадает с радиусом графа, то вершину называют **центральной**. Центральные вершины графа составляют его **центр**. Вершина называется **периферийной**, если ее эксцентриситет равен диаметру графа.

Несколько примеров. В полном графе K_n ($n > 1$) расстояние между любыми двумя (разными) вершинами равно 1, поэтому $r(K_n) = d(K_n) = 1$. В полном графе каждая вершина является и периферийной, и центральной.

Последнее свойство имеет место и для циклического графа C_n , для которого радиус также совпадает с диаметром: $r(C_n) = d(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ($\lfloor \cdot \rfloor$ — обозначение целой части).

Для колеса W_n радиус равен единице, а диаметр — двум, одна вершина является центральной, а остальные — периферийные.

Установим соотношения между радиусом и диаметром графа.

Теорема 8. Для произвольного графа G справедливы неравенства:

$$r(G) \leq d(G) \leq 2r(G).$$

Доказательство. Первое неравенство следует непосредственно из определений:

$$r(G) = \min_u e(u) \leq \max_u e(u) = d(G).$$

Чтобы доказать второе неравенство, положим: $d(u, v) = d(G)$; $e(w) = r(G)$. Применяя неравенство треугольника, получим:

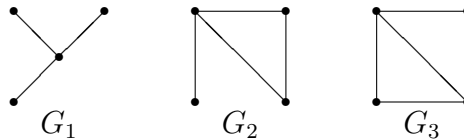
$$d(G) = d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v) \leq e(w) + e(w) = 2r(G).$$

Теорема доказана.

Тема 2.2. Гамильтоновы графы

У. Гамильтон — ирландский математик и астроном — в 1859 году придумал головоломку "Кругосветное путешествие", состоявшую в следующем: каждой вершине додекаэдра приписано имя известного города; необходимо по рёбрам проложить замкнутый путь, который проходил бы через все города, причем каждый город должен встретиться ровно один раз. В честь Гамильтона графы, в которых существуют маршруты с подобным свойством, были названы гамильтоновыми.

Перейдём к точным определениям. Граф G — **гамильтонов**, если в нём существует простая замкнутая цепь, проходящая через все вершины графа; указанную цепь называют при этом **гамильтоновым циклом**. Если в приведенных определениях отказаться от требования *замкнутости*, то придём к понятиям **полугамильтонова графа** и **гамильтоновой цепи**.



На рисунке граф G_1 не является гамильтоновым (и даже полугамильтоновым), G_2 — полугамильтонов граф, G_3 — гамильтонов.

Приведём примеры задач, сводящихся к нахождению гамильтоновых циклов в графе.

1. *На обед за круглым столом приглашены гости. Требуется рассадить их так, чтобы сидящие рядом были в дружеских отношениях.*

Рассмотрим граф, в котором вершины — гости, а наличие ребра, соединяющего вершины u и v , говорит о "дружбе" между u и v . Гостей следует рассадить за круглым столом в таком порядке, чтобы соответствующие им вершины были последовательными вершинами некоторого гамильтонова цикла.

2. **Задача Эйлера о коне.** *Обойти ходом коня шахматную доску, посетив при этом каждую клетку ровно один раз и последним (64-м) ходом вернуться в начальную клетку.*

Здесь граф содержит 64 вершины (клетки доски). Две вершины соединяются ребром, если возможен ход коня с одной клетки в другую. Степени вершин варьируются от 2 до 8. Эта задача достаточно широко описана в занимательной математической литературе. Есть что-то притягательное в задаче Эйлера о коне, если даже на студенческих партах можно встретить наряду с традиционными жанрами "наскального изобразительного искусства" изображения шахматной доски, клетки которой пронумерованы в соответствие с маршрутом коня!

3. **Задача коммивояжёра.** *Бродячий торговец¹ (коммивояжер) должен посетить n пунктов. Известна стоимость проезда между любыми двумя пунктами. Требуется выбрать наиболее "дешёвый" замкнутый путь, проходящий через все пункты.*

Вместо стоимости проезда можно говорить, конечно, о времени или расстоянии. В любом случае, каждому ребру графа приписан некоторый "вес"; задача состоит в нахождении гамильтонова цикла минимального веса (**вес цикла** — сумма весов составляющих его рёбер). Задача коммивояжера является классической задачей дискретной оптимизации, относится к классу так называемых NP-полных задач.

Обозначим через $P(n)$ множество всех простых помеченных графов с n вершинами, а через $P_G(n)$ — множество всех простых помеченных гамильтоновых графов с n вершинами. В 1969 г. советский математик В.А. Перепелица доказал, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|P_G(n)|}{|P(n)|} = 1.$$

¹В англоязычной литературе для задачи коммивояжёра используется термин Traveling salesman problem (TSP).

Таким образом, вероятность того, что "случайный" граф с n вершинами является гамильтоновым, стремится к единице с ростом n . Не установлено простых критериев гамильтоновости графа. Приведём одно из достаточных условий гамильтоновости.

Теорема 9. (О. Оре, 1960 г.) Если в простом графе с n вершинами ($n \geq 3$) для любой пары несмежных вершин u и v выполняется неравенство

$$\rho(u) + \rho(v) \geq n,$$

то граф является гамильтоновым.

Предварительно докажем следующее утверждение.

Лемма. Пусть G — простой негамильтонов граф, содержащий $n \geq 3$ вершин, в котором несмежные вершины u и v соединяет гамильтонова цепь. Тогда $\rho(u) + \rho(v) \leq n - 1$.

Доказательство леммы. В гамильтоновой цепи $u \rightarrow \dots \rightarrow v$, где вершины u и v не смежны, произвольная вершина, смежная с u (обозначим её u'), не может следовать за вершиной (например, v'), смежной с v . Действительно, гамильтонова цепь $u \rightarrow \dots \rightarrow v' \rightarrow u' \rightarrow \dots \rightarrow v$ легко преобразуется в гамильтонов цикл $u \rightarrow \dots \rightarrow v' \rightarrow v \rightarrow \dots \rightarrow u' \rightarrow u$. Поэтому число вершин, не смежных с u , не меньше числа вершин, смежных с v , то есть $n - 1 - \rho(u) \geq \rho(v)$, или $\rho(u) + \rho(v) \leq n - 1$. $\square$

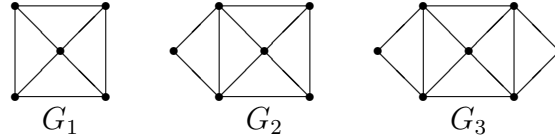
Доказательство теоремы. Предположив, что граф не является гамильтоновым, будем последовательно добавлять к нему рёбра до тех пор, пока он не станет гамильтоновым. Удалив последнее добавленное ребро uv , получим полугамильтонов граф G' , не являющийся гамильтоновым. В нем существует гамильтонова цепь $u \rightarrow \dots \rightarrow v$, причем вершины u и v не смежны. Применение леммы даёт: $\rho'(u) + \rho'(v) \leq n - 1$, где $\rho'(u)$, $\rho'(v)$ — степени вершин u и v в графе G' . Осталось заметить, что $\rho'(u) \geq \rho(u)$, $\rho'(v) \geq \rho(v)$, откуда $\rho(u) + \rho(v) \leq \rho'(u) + \rho'(v) \leq n - 1 < n$. Получено противоречие с условием. $\square$

Следствие (Г. Дирак, 1952 г.). Если в простом графе порядка $n \geq 3$ степень каждой вершины не меньше $n/2$, то граф является гамильтоновым.

Тема 2.3. Эйлеровы графы

Связный граф называется **эйлеровым**, если в нем существует замкнутая цепь, содержащая все рёбра графа; указанную цепь называют при этом **эйлеровым циклом**. Если в приведенных определениях снять требование

замкнутости, то придём к понятиям **полуэйлерова графа** и **эйлеровой цепи**.



На рисунке граф G_1 не является эйлеровым (и даже полуэйлеровым), G_2 — полуэйлеров граф, G_3 — эйлеров.

Узнать, является ли граф эйлеровым, очень просто ввиду следующей теоремы.

Теорема 10. (Л. Эйлер, 1736 г.) *Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда каждая его вершина имеет чётную степень.*

Доказательство. Необходимость. Начнем движение по эйлерову циклу с "середины" произвольного ребра и будем подсчитывать (по ходу движения) степени вершин. При прохождении через вершину её (текущая) степень увеличивается на 2. Поэтому степени всех вершин эйлерова графа чётны.

Достаточность. Сначала докажем утверждение, которое пригодится нам и в дальнейшем.

Лемма. *Пусть все вершины графа имеют чётную степень. Тогда через каждую неизolated вершину графа проходит некоторый цикл.*

Доказательство леммы. Будем строить цикл, исходя из произвольной неизolated вершины v . Если в графе имеется петля vv , то требуемый цикл уже есть. Пусть теперь vv_1 — произвольное ребро (не являющееся петлёй), инцидентное вершине v . Поскольку степень v_1 не меньше двух, существует ребро v_1v_2 , отличное от vv_1 . Если $v_2 \neq v$, то маршрут $v \rightarrow v_1 \rightarrow v_2$ можно нарастить некоторым ребром v_2v_3 . Из-за чётности степени каждой вершины маршрут можно удлинять всякий раз, если попадаем в вершину, отличную от v . В силу конечности множества рёбер через конечное число шагов описанной процедуры возникнет замкнутая цепь $v \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v$. $\square$

Продолжение доказательства теоремы. Поскольку в данном графе циклы есть, и количество их конечно, существует самый длинный из них. Пусть $C : v \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v$ — цикл наибольшей длины. Нужно доказать, что он содержит все рёбра графа. Пусть это не так. Тогда после удаления рёбер, составляющих цикл C , возникнет непустой граф G' , в котором степени всех вершин по-прежнему чётны. Если при этом вершины, через

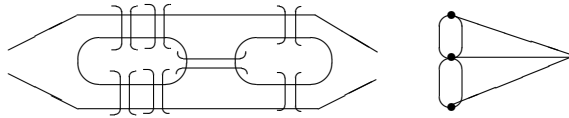
которые проходил цикл C , станут изолированными, то исходный граф не связан, что противоречит условию. Значит, в G' найдётся неизоллированная вершина w . Согласно лемме, через неё проходит некоторый цикл C' , составленный из рёбер графа G' . Объединив циклы C и C' (а это возможно, поскольку у них есть общая вершина и нет общих рёбер), получим цикл длиннее C — противоречие. $\square$

Следствие. *Связный граф является полуэйлеровым тогда и только тогда, когда в нём не более двух вершин имеют нечётную степень.*

Доказательство. *Необходимость* доказывается так же, как в теореме. *Достаточность.* Если вершин нечётной степени нет, то граф является эйлеровым, а, значит, и полуэйлеровым. По следствию из леммы о рукопожатиях ровно одной вершины нечётной степени не может быть. Пусть теперь в графе ровно две вершины имеют нечётную степень. Соединив эти две вершины новым ребром, получим, согласно теореме, эйлеров граф. Построим в новом графе эйлеров цикл; удаление ранее добавленного ребра приводит к эйлеровой цепи в исходном графе.

Задача о кенигсбергских мостах

Во времена Леонарда Эйлера семь мостов города Кенигсберга (ныне Калининград) были расположены на реке Прегель так, как показано на рисунке.



Мог ли житель этого города, выйдя из дома, вернуться обратно, пройдя по каждому мосту ровно один раз? Рассмотрим граф, вершины которого отвечают связным участкам суши (двум берегам реки и двум островам), а рёбра — мостам. Все четыре вершины графа имеют нечётную степень, стало быть, ответ к задаче отрицательный.

Доказательство теоремы об эйлеровых графах имеет конструктивный характер, на его основе может быть построен алгоритм нахождения эйлерова цикла в графе, однако этот алгоритм будет *рекурсивным* (при конструировании эйлерова цикла используются эйлеровы циклы в некоторых подграфах исходного графа). Известен следующий нерекурсивный

Алгоритм Флёри построения эйлерова цикла

1. Начать цикл с произвольной вершины u . Присвоить произвольному ребру uv , инцидентному u , номер 1. Удалить из графа ребро uv , перейти в вершину v .
2. Пусть после k шагов мы находимся в вершине w . Выбрать произвольное ребро wt , причем мост выбирается только в том случае, если нет другой возможности. Ребру wt присвоить номер $k + 1$. Удалить из графа ребро wt , перейти в вершину t .

Число шагов в описанном алгоритме совпадает с числом рёбер в графе. По окончании работы алгоритма рёбра исходного графа будут пронумерованы в порядке их следования в эйлеровом цикле.

Иллюстрация работы алгоритма Флёрри

Докажем корректность предложенного алгоритма.

Теорема 11. *Применение алгоритма Флёрри к произвольному эйлерову графу всегда приводит к построению эйлерова цикла.*

Доказательство. Пусть G — эйлеров граф. Тогда степень каждой его вершины чётна. В силу этого алгоритм может закончить свою работу лишь в начальной вершине u , построив при этом некоторый цикл C . Нужно доказать, что цикл C включает в себя все рёбра графа G . Если это не так, то после удаления рёбер C граф распадается на компоненты связности, хотя бы одна из которых (назовем её B) содержит рёбра. Обозначим через A мультимножество всех рёбер цикла C , инцидентных вершинам B . Пусть a — наибольший номер ребра (полученный в результате работы алгоритма Флёрри) из A , тогда к моменту удаления данного ребра из графа оно было мостом; однако это противоречит правилу выбора очередного ребра: поскольку в компоненте B степень каждой вершины чётна (это легко видеть), то в ней существует цикл, идя по которому (напомним, любое ребро цикла — не мост) можно было избежать преждевременного удаления моста. Корректность алгоритма Флёрри доказана. $\square$

В заключение параграфа отметим, что для случайным образом построенного графа вероятность его эйлеровости (при большом числе вершин) мала.

Теорема 12. (Р. Рейд, 1962 г.) Пусть $P(n)$ — множество всех простых помеченных графов с n вершинами, $P_e(n)$ — множество всех простых помеченных эйлеровых графов с n вершинами. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|P_e(n)|}{|P(n)|} = 0.$$

Доказательство. Пусть $P_0(n)$ — множество всех простых помеченных графов с n вершинами, степень каждой из которых чётна. Связные графы из $P_0(n)$ составляют, как известно, $P_e(n)$; поэтому $P_e(n) \subset P_0(n)$ и $|P_e(n)| \leq |P_0(n)|$. Каждый граф из $P(n)$ определяется некоторым подмножеством рёбер полного графа K_n , содержащего C_n^2 рёбер; в силу этого $|P(n)| = 2^{C_n^2}$. Нетрудно подсчитать и мощность $P_0(n)$. Установим взаимно однозначное соответствие между $P(n-1)$ и $P_0(n)$: если все вершины нечётной степени произвольного графа из $P(n-1)$ (число их по следствию из леммы о рукопожатиях чётно) соединить с n -й вершиной, то получим граф из $P_0(n)$. Таким образом,

$$|P_0(n)| = |P(n-1)| = 2^{C_{n-1}^2}.$$

Дальнейшее просто:

$$\frac{|P_e(n)|}{|P(n)|} \leq \frac{|P_0(n)|}{|P(n)|} = \frac{2^{C_{n-1}^2}}{2^{C_n^2}} = 2^{\frac{(n-1)(n-2) - n(n-1)}{2}} = 2^{1-n}.$$

Так как $2^{1-n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|P_e(n)|}{|P(n)|} = 0$.

Тема 2.4. Деревья

2.4.1. Определения и свойства

Граф, не содержащий циклов, называют **ациклическим** графом, или **лесом**. Заметим, что в ациклическом графе отсутствуют петли и кратные рёбра, в силу чего он является простым графом. **Дерево** — это связный ациклический граф. Таким образом, компоненты связности леса являются деревьями, т.е. лес — дизъюнктное объединение деревьев.

В следующей серии теорем вскрываются важные свойства ациклических графов; при их доказательстве часто будут использоваться леммы из 2.1.2..

Теорема 13. *Граф является лесом тогда и только тогда, когда каждое ребро графа — мост.*

Доказательство. Граф G — лес $\iff$ в G нет циклов $\iff$ ни одно ребро не входит ни в какой цикл $\iff$ (по лемме 1.) все рёбра G — мосты.

Теорема 14. *Дерево с n вершинами содержит $n - 1$ ребро.*

Доказательство. Пусть G — дерево с n вершинами. В силу предыдущей теоремы каждое ребро G (и всех его подграфов) является мостом. Будем

последовательно удалять рёбра G , при этом каждый раз число компонент связности увеличивается на 1 (по лемме 2.). Первоначально имелась одна компонента связности (так как дерево — связный граф). После удаления всех рёбер граф будет иметь n изолированных вершин, т.е. n компонент связности. Таким образом, в указанной процедуре был выполнен $n - 1$ шаг; значит G содержит $n - 1$ ребро.

Следствие 1. Пусть в лесе n вершин, m рёбер и k компонент связности. Тогда $m = n - k$.

Доказательство. Пусть в i -той компоненте связности леса n_i вершин и m_i рёбер ($i = 1, \dots, k$); по теореме 14. для каждого i имеем $m_i = n_i - 1$. Подсчитаем общее число рёбер леса:

$$m = \sum_{i=1}^k m_i = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) = \sum_{i=1}^k n_i - k = n - k.$$

Следствие 2. Если в лесе число рёбер на 1 меньше числа вершин, то этот лес является деревом.

Действительно, в силу следствия 1 число компонент связности леса равно разности числа вершин и числа рёбер (в нашем случае — единице).

Объединив формулировки теоремы 14. и следствия 2, получим следующее утверждение: *лес является деревом тогда и только тогда, когда число его рёбер на 1 меньше числа вершин.*

Следствие 3. В дереве, которое содержит по меньшей мере две вершины, не менее двух висячих вершин.

Доказательство. Пусть в дереве $n \geq 2$ вершин: $v_1, \dots, v_n$, тогда оно содержит $m = n - 1$ ребро. По лемме о рукопожатиях $\rho(v_1) + \dots + \rho(v_n) = 2m = 2(n - 1)$. Можно считать, что вершины упорядочены по их степеням: $\rho(v_1) \leq \rho(v_2) \leq \dots \leq \rho(v_n)$. Докажем, что $\rho(v_1) = \rho(v_2) = 1$. Предполагая противное, легко получить противоречие: если $\rho(v_2) > 1$, т.е. $\rho(v_2) \geq 2$, то

$$2(n - 1) = \rho(v_1) + \rho(v_2) + \dots + \rho(v_n) \geq 1 + (n - 1)\rho(v_2) \geq 1 + 2(n - 1).$$

Из следствия 3 вытекает

Следствие 4. В лесе, содержащем хотя бы одно ребро, не менее двух висячих вершин.

Теорема 14. может быть обращена следующим образом.

Теорема 15. Пусть в связном графе число рёбер на 1 меньше числа вершин. Тогда этот граф — дерево.

Доказательство. Пусть в графе G n вершин, $m = n - 1$ рёбер. По теореме 7. в простом графе $m \geq n - k$, где k — число компонент связности. Для рассматриваемого графа $k = 1$ и имеет место равенство $m = n - k$. Отсюда ясно, что граф является простым, так как в противном случае удалив все петли и (лишние) кратные рёбра (сделав граф простым), мы уменьшили бы m , не меняя при этом n и k , что привело бы к нарушению упомянутого неравенства. Итак, граф G — простой и для него $m = n - k$. Удаление любого ребра графа приведет к нарушению неравенства $m \geq n - k$, если при этом не изменится число компонент связности k ; поэтому удаление произвольного ребра изменяет k , то есть каждое ребро графа есть мост, в силу чего (по теореме 13.) G — ациклический граф. Так как при этом G по условию связный граф, G — дерево. Теорема доказана.

Теорема 16. *Граф является деревом тогда и только тогда, когда любые две его вершины соединены ровно одной простой цепью.*

Необходимость. Пусть G — дерево. Тогда G — связный граф, и любые две его вершины соединены простой цепью (2.1.2.), при этом двух различных цепей с таким свойством не может быть, так как их объединение дает цикл, в то время как в дереве циклов нет.

Достаточность. Если в графе любые две вершины соединены цепью, то, как известно, граф является связным. Ацикличность графа также очевидна: если бы в графе был цикл, то любые две вершины этого цикла соединены по меньшей мере двумя простыми цепями.

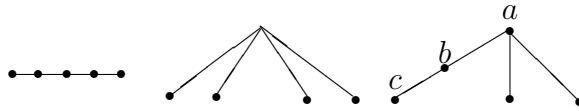
Теорема 17. *Лес является деревом в том и только в том случае, когда добавление любого ребра приводит к образованию ровно одного цикла.*

Доказательство. Пусть ациклический граф связан. В силу теоремы 16. любые две вершины u и v соединены ровно одной простой цепью. Поэтому добавление ребра uv приводит к образованию цикла, причем ровно одного, так как если бы их образовалось хотя бы два, то объединяя соответствующие "участки" этих циклов, можно было бы построить цикл, не содержащий ребра uv , что противоречило бы ацикличности исходного графа.

Обратно. Если при добавлении ребра uv образуется цикл, то удаляя из этого цикла ребро uv , мы получим цепь, связывающую вершины u и v , значит, любые две вершины графа связаны, т.е. граф связан и является деревом (так как по условию он ациклический).

2.4.2. Теорема Кэли о числе помеченных деревьев

Обозначим через P_n число помеченных деревьев с n вершинами. Ясно, что $P_1 = P_2 = 1$. Помеченное дерево с тремя вершинами полностью определяется своей центральной вершиной, поэтому $P_3 = 3$. Если в дереве 4 вершины, то оно представляет собой либо полный двудольный граф $K_{1,3}$, либо простую (незамкнутую) цепь длины 4. Первого типа имеется 4 различных помеченных дерева, а второго — $12 (= C_4^2 \cdot 2$; крайние вершины цепи выбираются C_4^2 способами, после чего для нумерации двух оставшихся вершин остается две возможности); таким образом, $P_4 = 4 + 12 = 16$. Дерево с 5 вершинами имеет один из трех видов, представленных на рисунке.



Количество деревьев типа "цепь" равно $C_5^3 \cdot 3! = 60$, типа $K_{1,4}$ — 5. Произвольное дерево третьего типа определяется пометками вершин a, b, c (см. обозначения на рисунке); поэтому их число равно $A_5^3 = 60$. Итак, $P_5 = 60 + 5 + 60 = 125$. Последовательность $1, 1, 3, 16, 125$ может быть задана соотношением $P_n = n^{n-2}$. Количество помеченных деревьев с 6 вершинами также нетрудно подсчитать "вручную" (читателю рекомендуется выполнить это полезное упражнение), после чего высказанная гипотеза получит новое подтверждение. И в общем случае имеет место

Теорема 18. (А.Кэли, 1897 г.) Число помеченных деревьев с n вершинами равно n^{n-2} .

Существует много способов доказательства этой знаменитой теоремы (см., например, [11]). Мы приведем не самое богатое в идейном плане, но, возможно, самое простое доказательство.

Покажем, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством помеченных n -вершинных деревьев и множеством размещений с повторениями из n элементов по $n - 2$; поскольку $\overline{A_n^{n-2}} = n^{n-2}$, это будет доказывать теорему. Сопоставление дереву упорядоченного набора (называемого **кодом Прюфера**) $(a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$ (где для каждого i $a_i \in \{1, 2, \dots, n\}$) будем называть **кодированием дерева** (или **кодировкой**), а обратный процесс (получения по указанному набору дерева) — **декодированием** (или **декодировкой**).

Кодирование дерева выполняется с помощью следующего алгоритма.

1. Положить $i = 1$.

2. Пусть v_i — висячая вершина дерева с наименьшей меткой; тогда a_i — метка смежной с ней вершины.
3. Удалить из дерева вершину v_i и инцидентное ей ребро. Если в дереве осталось более двух вершин, увеличить i на 1 и перейти к п.2, иначе — закончить.

Очевидно, что разные деревья имеют разные коды.

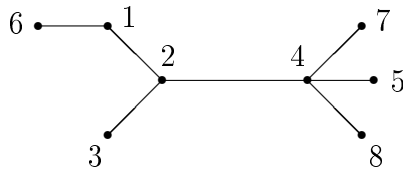
Декодирование дерева. Пусть $B_0 = \{1, 2, \dots, n\}$, а b_1 — наименьшее число из B_0 , не встречающееся в наборе $(a_1, \dots, a_{n-2})$. Тогда b_1 — номер висячей вершины, смежной с a_1 , и дерево содержит ребро (b_1, a_1) .

Набор $(a_2, \dots, a_{n-2})$ кодирует дерево T_1 с множеством пометок $B_1 = B_0 \setminus \{b_1\}$ (T_1 получается из T удалением вершины b_1 и инцидентного ей ребра (a_1, b_1)).

В качестве b_2 возьмем наименьшее число из B_1 , не встречающееся в последовательности $(a_2, \dots, a_{n-2})$. Дерево T_1 (значит, и T) должно содержать ребро (b_2, a_2) . Теперь набор $(a_3, \dots, a_{n-2})$ описывает дерево T_2 с множеством пометок $B_2 = B_1 \setminus \{b_2\}$. И так далее.

На k -м шаге процедуры рассматривается дерево T_{k-1} с множеством пометок B_{k-1} . В множестве B_{k-1} выбирается наименьшее число (b_k) , не входящее в набор $(a_k, \dots, a_{n-2})$, после чего констатируется наличие в дереве T ребра (b_k, a_k) . После $n-2$ шагов будут выявлены $n-2$ ребра дерева T ; при этом множество B_{n-2} будет содержать два числа — пометки вершин последнего, $n-1$ -го, ребра, включаемого в дерево. (Дерево T_{n-2} , содержащее две вершины, строится однозначно, и поэтому не нуждается в кодировке).

Осталось ещё убедиться в том, что полученный после декодирования граф действительно является деревом. В самом деле, граф T_{k-1} получается из графа T_k добавлением ребра (b_k, a_k) , причем вершина b_k не принадлежит графу T_k . Поэтому из ацикличности T_k следует ацикличность T_{k-1} . Поскольку T_{n-2} — дерево, то деревьями являются и графы $T_{n-3}, \dots, T_2, T_1, T$.



Пример. Дерево имеет код $(2, 4, 1, 2, 4, 4)$.

По коду $(2, 4, 1, 2, 4, 4)$ восстановим дерево. Процесс декодировки удобно отразить в следующей таблице.

k	B_k	код T_k	(b_k, a_k)
0	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	$(2, 4, 1, 2, 4, 4)$	
1	$\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$	$(4, 1, 2, 4, 4)$	$(3, 2)$
2	$\{1, 2, 4, 6, 7, 8\}$	$(1, 2, 4, 4)$	$(5, 4)$
3	$\{1, 2, 4, 7, 8\}$	$(2, 4, 4)$	$(6, 1)$
4	$\{2, 4, 7, 8\}$	$(4, 4)$	$(1, 2)$
5	$\{4, 7, 8\}$	(4)	$(2, 4)$
6	$\{4, 8\}$		$(7, 4)$
7			$(4, 8)$

Как и следовало ожидать, получено дерево, закодированное выше.

2.4.3. Стягивающие деревья

Стягивающим (или **остовным**) **деревом** связного графа G называется произвольный его подграф, содержащий все вершины G и являющийся деревом.

Остовным лесом графа G называется произвольный его подграф, содержащий все вершины G и являющийся лесом. Таким образом, компоненты связности остовного леса графа G являются стягивающими деревьями компонент G .

Построить остовный лес нетрудно: достаточно последовательно удалять из графа рёбра, входящие в циклы, до тех пор, пока не будет построен ациклический граф (лес), который, очевидно, будет остовным для исходного графа.

Граф называется **взвешенным**, если каждому его ребру l поставлено в соответствие неотрицательное число $\mu(l)$ (**вес ребра**). **Весом графа** $G = \langle V, E \rangle$ называют сумму весов всех его рёбер: $\mu(G) = \sum_{l \in E} \mu(l)$.

Рассмотрим следующую задачу. *Имеется n пунктов. Для любой пары пунктов i и j известна стоимость сооружения дороги между ними — c_{ij} . Требуется выбрать сеть дорог такую, чтобы любые два пункта соединялись каким-либо маршрутом и при этом стоимость ее сооружения была наименьшей.*

Если рассмотреть полный граф порядка n , вершины которого будут соответствовать указанным (географическим) пунктам, а рёбра будут иметь вес, равный стоимости сооружения дороги между соответствующими пунктами, то на языке теории графов данная задача будет формулироваться так: *в данном графе найти стягивающее дерево наименьшего веса*. Отметим, что согласно теореме Кэли в полном графе K_n имеется n^{n-2} различных стягивающих деревьев, и,

в принципе, рассматриваемая задача может быть решена перебором по всем таким деревьям. Ясно, однако, что с *практической* точки зрения подобный алгоритм решения не выдерживает никакой критики. Существуют эффективные алгоритмы нахождения стягивающего дерева минимального веса в связном взвешенном графе. При описании следующих алгоритмов $G = \langle V, E \rangle$ будет обозначать исходный граф, а $T = \langle V, P \rangle$ — искомое дерево.

Алгоритм Д. Краскала (1956 г.)

1. Положить $P = \phi$, $n = |E|$. Следующий шаг выполнять $n - 1$ раз.
2. Включить в T ребро графа G наименьшего веса, обладающее тем свойством, что при добавлении его в графе T не образуется циклов. Исключить из G данное ребро.

На рисунке изображены взвешенный граф (числа показывают веса соответствующих рёбер) и стягивающее дерево, полученное в результате работы алгоритма.

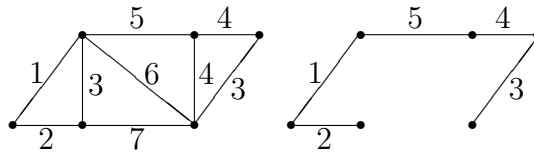


Иллюстрация работы алгоритма Краскала

Обоснование корректности алгоритма Краскала

Заметим сначала, что в результате работы алгоритма строится стягивающее дерево исходного графа (граф T ациклический по построению и в нём число рёбер на 1 меньше числа вершин, поэтому в силу теоремы 17. он является деревом). Пусть $P = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ (будем считать, что рёбра записаны "в порядке поступления"), а $S = \langle V, M \rangle$ — произвольное стягивающее дерево исходного графа. Нужно доказать, что $\mu(S) \geq \mu(T)$. Если $S \neq T$, то $P \neq M$ и существует такое k , что $e_1, e_2, \dots, e_{k-1} \in M, e_k \notin M$. Добавим к дереву S ребро e_k , при этом образуется цикл, обозначим его C . В цикле C найдется ребро e , принадлежащее множеству M и не входящее в P . Удалив это ребро, получим дерево S' с множеством рёбер $M' = M \cup \{e_k\} \setminus \{e\}$ (вновь ссылаемся на теорему 15.). Сравним веса деревьев S' и S : $\mu(S') = \mu(S) + \mu(e_k) - \mu(e)$. Так как в силу алгоритма Краскала $\mu(e_k) \leq \mu(e)$, $\mu(S') \leq \mu(S)$. Итак, в дереве S' по сравнению с деревом S число рёбер, общих с деревом T , на 1 больше, причём вес S' не

больше веса S . Указанную процедуру будем повторять до тех пор, пока не получим дерево T . В результате будет построена последовательность деревьев $S, S', S'', \dots, T$, в которой каждое последующее дерево имеет вес, не больший, чем предыдущее:

$$\mu(S) \geq \mu(S') \geq \mu(S'') \geq \dots \geq \mu(T),$$

откуда и следует требуемое: $\mu(S) \geq \mu(T)$.

Алгоритм Р. Прима (1957 г.) похож на алгоритм Краскала; основное различие состоит в том, что в этом алгоритме строится "разрастающаяся" дерево, более точно: последовательность деревьев

$$S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_n,$$

где дерево $S_i = \langle V_i, E_i \rangle$ содержит i вершин ($i = 1, \dots, n$).

1. Пусть $V_1 = \{x_1\}$, где $x_1 \in V$ — произвольная вершина G , $E_1 = \phi$. Следующий шаг выполнять для $i = 2, \dots, n$.
2. Получить дерево S_i из дерева S_{i-1} добавлением ребра графа G наименьшего веса (среди тех рёбер, при добавлении которых к S_{i-1} вновь образуется дерево). Исключить из G данное ребро.

Обоснование корректности алгоритма Прима такое же, как и алгоритма Краскала.

Сравним трудоёмкость описанных алгоритмов для графа с n вершинами и m рёбрами. В первом из них основные затраты времени падают на сортировку рёбер по их весу; известно, что для выполнения сортировки m объектов требуется порядка $m \log_2 m$ операций сравнения. Во втором алгоритме на i -м шаге среди $n - i$ вершин, ещё не включенных в дерево, нужно выбрать ту, чье "подключение" к дереву обойдется наиболее "дешево" (ребро, соединяющее новую вершину с одной из "старых", должно быть наименьшего веса); для этого требуется порядка $n - i - 1$ операций. Суммируя по i , получим оценку трудоёмкости алгоритма Прима: $O(n^2/2)$ операций сравнения. Понятно, что для полных графов (где число рёбер $m = \frac{n(n-1)}{2}$) алгоритм Прима менее трудоёмок, чем алгоритм Краскала.

Опишем эффективную реализацию алгоритма Прима [14]. На каждом шаге алгоритма каждой вершине x_i , ещё не включенной в дерево, сопоставляется **пометка** — пара чисел $[a_i, b_i]$, где b_i — наименьший вес ребра, соединяющего x_i с какой-либо вершиной, уже включенной в дерево, a_i — номер соответствующей вершины. Таким образом, $b_i = \mu(x_i a_i)$. Шаг алгоритма состоит в выборе $b_{i^*} = \min(b_i)$ и добавлении к дереву ребра $a_{i^*} x_{i^*}$.

```

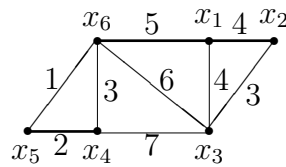
/*  $n \geq 2$  - число вершин графа; */
/*  $V = \{x_1, \dots, x_n\}$  - множество вершин; */
/*  $V_r$  - множество вершин, ещё не включённых в дерево; */
/*  $E_s$  - множество рёбер строящегося дерева; */
 $V_r = V \setminus \{x_1\}$ ;  $E_s = \phi$ ;
/* Расстановка начальных пометок */
for( $x_i \in V_r$ )
    if( $x_i$  и  $x_1$  смежны)  $\{a_i = x_1; b_i = \mu(a_i x_i); \}$ ;
    else  $\{a_i = 0; b_i = \infty\}$ ;
/*  $k$  - порядковый номер ребра, включаемого в дерево */
for( $k = 1; k < n$ ;) {
    /* определение нового ребра */
     $b_{i^*} = \min_{x_i \in V_r} b_i$ ;
     $E_s = E_s \cup \{a_{i^*}, x_{i^*}\}$ ;
     $V_r = V_r \setminus \{x_{i^*}\}$ ;
    /* пересчет пометок */
    if( $++k < n$ )
        for( $x_i \in V_r$ )
            if( $x_i$  смежно с  $x_{i^*}$  и  $\mu(x_i x_{i^*}) < b_i$ ) {
                 $b_i = \mu(x_i, x_{i^*}); a_i = x_{i^*}$ ;
            }
}

```

Рис. 2: Алгоритм Прима нахождения стягивающего дерева наименьшего веса

На рис. 2 дан набросок программной реализации алгоритма (с использованием конструкций языка программирования Си).

Пример. Работа алгоритма для графа, изображенного на рисунке,



показана в следующей таблице.

шаг	1	2	3	4	5
V_r	$\{x_2, \dots, x_6\}$	$\{x_3, \dots, x_6\}$	$\{x_4, x_5, x_6\}$	$\{x_4, x_5\}$	$\{x_4\}$
$[a_2, b_2]$	$[x_1, 4]$	—	—	—	—
$[a_3, b_3]$	$[x_1, 4]$	$[x_2, 3]$	—	—	—
$[a_4, b_4]$	$[0, \infty]$	$[0, \infty]$	$[x_3, 7]$	$[x_3, 7]$	$[x_5, 2]$
$[a_5, b_5]$	$[0, \infty]$	$[0, \infty]$	$[0, \infty]$	$[x_6, 1]$	—
$[a_6, b_6]$	$[x_1, 5]$	$[x_1, 5]$	$[x_1, 5]$	—	—
$\min b_i$	b_2	b_3	b_6	b_5	b_4
новое ребро	x_1x_2	x_2x_3	x_1x_6	x_6x_5	x_5x_4

Тема 2.5. Кратчайшие пути

2.5.1. Ориентированные графы

Напомним, что **ориентированный граф** (сокращенно: **орграф**) — это упорядоченная пара $G = \langle V, A \rangle$, где

V — непустое конечное множество — множество вершин;

A — конечное мультимножество *упорядоченных* пар элементов V (необязательно различных) — мультимножество **дуг**.

Основанием орграфа $G = \langle V, A \rangle$ называют (неориентированный) граф $\langle V, E \rangle$, который получается из G заменой дуг рёбрами (каждая дуга (u, v) заменяется ребром $\{u, v\}$). Пример — на рис. 3. Орграфы называются **изо-**



Рис. 3: Орграф и его основание

морфными, если существует изоморфизм между их основаниями, сохраняющий порядок вершин на каждой дуге.

Через $\Gamma(v)$ обозначим множество вершин, *к которым* ведут дуги с началом в вершине v : $\Gamma(v) = \{u \in V | (v, u) \in A\}$. Число таких дуг называют **полустепенью исхода** вершины v : $\overleftarrow{\rho}(v) = |\Gamma(v)|$. Вершину с нулевой полустепенью исхода называют **стоком**.

Через $\Gamma^{-1}(v)$ обозначим множество вершин, *из которых* ведут дуги к вершине v : $\Gamma^{-1}(v) = \{u \in V | (u, v) \in A\}$. Число таких дуг называют **полустепенью захода** вершины v : $\overrightarrow{\rho}(v) = |\Gamma^{-1}(v)|$. Вершину с нулевой полустепенью захода называют **источником**.

Степенью вершины орграфа называют сумму полустепеней исхода и захода: $\rho(v) = \overleftarrow{\rho}(v) + \overrightarrow{\rho}(v)$.

Подсчитав двумя способами число дуг орграфа $\langle V, A \rangle$, получим следующее утверждение.

Лемма о рукопожатиях для орграфов.

$$|A| = \sum_{v \in V} \overleftarrow{\rho}(v) = \sum_{v \in V} \overrightarrow{\rho}(v).$$

Вполне очевидным образом переносятся на случай ориентированных графов такие понятия (известные по предыдущим параграфам этой главы), как **смежность вершин, матрица смежности, простой граф** и многие другие. Термин *маршрут* заменим термином *путь*. Итак, **путь** в орграфе — последовательность дуг вида $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{m-1}, v_m)$, которую будем записывать также в виде $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_m$ и называть **путём из v_0 в v_m** .

2.5.2. Нахождение кратчайших путей в орграфе

Пусть $G = \langle V, A \rangle$ — **взвешенный орграф**, т.е. каждой его дуге $e = (u, v) \in A$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\mu(e) = \mu(u, v)$, называемое ее **весом**. **Расстоянием** между произвольными вершинами s и t орграфа назовем наименьший **вес** пути из s в t :

$$d(s, t) = \min_{P: s \rightarrow \dots \rightarrow t} \mu(P), \text{ где } \mu(P) = \sum_{e \in P} \mu(e) - \text{вес пути } P,$$

а соответствующий путь будем называть **кратчайшим путем из s в t** . Вес **тривиального** (т.е. не содержащего дуг) пути считаем равным нулю, посему $d(s, s) = 0$. Если не существует пути из s в t , то полагаем: $d(s, t) = \infty$.

Очевидна практическая значимость задачи нахождения кратчайших путей в ориентированном графе.

Пример 1. Требуется выбрать кратчайший маршрут движения автомобиля от одного географического пункта до другого. Здесь графовая модель задачи очевидна. Рассмотрим граф, в котором вершины отвечают географическим пунктам и перекрёсткам шоссеиных дорог, а дуги — соответствующим участкам дорог. Вес дуги — длина соответствующей ей дороги. Кратчайший путь в графе описывает кратчайший маршрут движения автомобиля.

Пример 2.([20]) Мелкий вкладчик решает, как распорядиться своим капиталом в следующем году. Он располагает некоторым набором вариантов: положить деньги на сберегательную книжку в тот или иной банк, купить облигации или акции и т.д. Предположим, что вклады могут производиться или изыматься в начале каждого месяца. Построим граф, вершины которого соответствуют месяцам года, а дуги описывают действия вкладчика: дуга uv веса w говорит о том, что некоторый вклад делается на срок, начиная месяцем u и заканчивая месяцем v , и приносит доход w . Для нахождения оптимальной стратегии размещения капитала вкладчик должен найти в данном графе путь наибольшей длины от источника к стоку. Эта задача аналогична задаче минимизации.

Алгоритм Е. Дейкстры (1959 г.) находит кратчайшие пути от произвольной фиксированной вершины орграфа. Алгоритм представляет собой итерационную процедуру, на каждом шаге которой каждой вершине v сопоставляется пометка $l(v)$, которая является либо *постоянной* и равной при этом расстоянию $d(s, v)$ от начальной вершины s до данной вершины, либо *временной* — числом, являющимся оценкой сверху для $d(s, v)$. В результате каждой итерации оценки уточняются, и при этом ровно одна временная пометка (а именно — наименьшая) переходит из разряда временных в разряд постоянных (после чего уже не меняется).

Перед первой итерацией начальная вершина имеет постоянную пометку $l(s) = 0$, у остальных вершин пометки временные и полагаются равными ∞ . Итерация алгоритма состоит в просмотре вершин v с временными пометками, к которым ведут дуги из вершины p — вершины, последней получившей постоянную пометку (для первой итерации $p = s$). Пусть $a = l(p) + \mu(p, v)$. Если окажется, что $l(v) > a$, то a будет новым значением $l(v)$ (временная пометка данной вершины уменьшается).

Алгоритм заканчивает работу, когда заданная конечная вершина t получает постоянную пометку.

Иллюстрация работы алгоритма Дейкстры

Более детальное описание алгоритма (с использованием конструкций Си, а также математической символики) — на рис. 4.

Обоснование корректности алгоритма Дейкстры. Алгоритм работает таким образом, что после каждой итерации пометка каждой вершины v есть вес кратчайшего из тех путей из s в v , в которых предпоследняя вершина имеет постоянную пометку. Пусть после очередной итерации вершина v^* получает постоянную пометку. Достаточно доказать, что кратчайший путь из s в v^* проходит через вершины с постоянными пометками. Предположим противное: кратчайший путь P из s в v^* проходит через некоторую

вершину с временной пометкой:

$$P : s \rightarrow s_1 \rightarrow \dots \rightarrow s_k \rightarrow w \rightarrow \dots \rightarrow v^*,$$

пусть w — первая такая вершина. Тогда

$$\mu(P) = \sum_{e \in P} \mu(e) > \mu(s, s_1) + \dots + \mu(s_k, w).$$

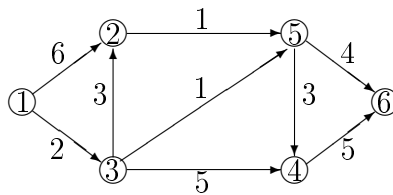
Таким образом, существует путь из s в w , проходящий только через вершины с постоянными пометками и имеющий меньший вес, чем путь из s в v^* , что противоречит выбору v^* .

Трудоёмкость алгоритма Дейкстры. Пусть граф содержит n вершин. На каждой итерации число сложений не превышает количества временных пометок, которое в начале работы алгоритма равно $n - 1$, а с каждой итерацией уменьшается на единицу. Таким образом, общее число сложений не более $(n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$. Операции сравнения выполняются как при пересчете пометок, так и при нахождении минимальной временной пометки; нетрудно подсчитать, что их число не превосходит $n(n - 1)$. Таким образом, трудоёмкость алгоритма оценивается как $O(n^2)$ операций. В [18] приводится модификация алгоритма Дейкстры, имеющая трудоёмкость $O(m \log_2 n)$ (m — число дуг).

Для того, чтобы найти расстояния от заданной вершины s до *всех остальных* вершин орграфа алгоритм с рис. 4 модифицируется следующим образом:

- условие продолжения итераций $p \neq t$ заменяется на $M \neq \phi$.

Пример. Работа алгоритма для графа, изображенного на рисунке



(рядом с каждой дугой проставлен ее вес), показана в следующей таблице (элементы таблицы — за исключением первого и последнего столбца — пометки вершин графа; в рамку заключены постоянные пометки вершин).

итерация \ вершина	1	2	3	4	5	6	p
0	0	∞	∞	∞	∞	∞	1
1	-	6	2	∞	∞	∞	3
2	-	5	-	7	3	∞	5
3	-	5	-	6	-	7	2
4	-	-	-	6	-	7	4
5	-	-	-	-	-	7	6

Анализ таблицы показывает, что кратчайший путь от 1 вершины к 6 вершине таков: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6$.

```

/* Нахождение кратчайшего пути между двумя вершинами (s и t) */
/* V - множество вершин графа; */
/* s - начальная вершина;      */
/* t - конечная вершина;      */
/* l - пометки вершин;          */

/* Расстановка начальных пометок */
l(s)=0;
for(v∈V) if(v!=s) l(v)=∞;
/* M - множество временных пометок */
M=V\{s};
/* p - вершина, последней получившая постоянную пометку */
p=s;

while(p!=t) {
    for(v∈ M ∩ Γ(p) ) {
        a=l(p)+μ(p,v);
        if(a<l(v)) {
            /* θ(v) - вершина, из которой идет дуга в v */
            /* (в кратчайшем пути) */
            l(v)=a; θ(v)=p;
        }
    }
    l(v*)=minv∈M l(v);
    /* пометка v* становится постоянной */
    M=M\{v*}; p=v*;
}
d(s,t)=l(t); /* расстояние между s и t; */
/* кратчайший путь: s → ... → θ(θ(t)) → θ(t) → t */

```

Рис. 4: Алгоритм Дейкстры нахождения кратчайшего пути в орграфе

Нахождение расстояний между всеми парами вершин орграфа. В принципе, данную задачу можно решить n -кратным выполнением алгоритма Дейкстры, где n — количество вершин графа. Однако существует примерно вдвое менее трудоемкий алгоритм —

Алгоритм Р.Флойда (1962 г.). Строится последовательность матриц $(k) = (c_{ij}^{(k)})$, где (0) — матрица весов дуг графа, т.е. для всех i и j $c_{ij}^{(0)} = \mu(v_i, v_j)$ (если в графе нет дуги (v_i, v_j) , то полагаем: $\mu(v_i, v_j) = \infty$), а при $k = 1, \dots, n$ $c_{ij}^{(k)}$ — длина кратчайшего пути из v_i в v_j такого, что в качестве промежуточных вершин могут быть лишь $v_1, v_2, \dots, v_k$. Очевидно, что $c_{ij}^{(n)}$ — искомое расстояние между вершинами v_i и v_j . Несложно по индукции доказать следующую рекуррентную формулу, позволяющую по матрице $C^{(k-1)}$ построить матрицу $C^{(k)}$:

$$c_{ij}^{(k)} = \min(c_{ij}^{(k-1)}, c_{ik}^{(k-1)} + c_{kj}^{(k-1)}).$$

Действительно, кратчайший путь из v_i в v_j (где в качестве промежуточных вершин могут использоваться лишь $v_1, v_2, \dots, v_k$) либо содержит вершину v_k , либо не содержит. В первом случае он имеет вес $c_{ij}^{(k-1)}$ (так как при этом промежуточными вершинами могут быть только $v_1, \dots, v_{k-1}$), во втором — складывается из кратчайших путей из v_i в v_k и из v_k в v_j , и его вес равен $c_{ik}^{(k-1)} + c_{kj}^{(k-1)}$.

Тема 2.6. Задача сетевого планирования и управления (PERT)

Процесс выполнения сложного проекта удобно представить в виде орграфа, дуги которого соответствуют **этапам** (или **операциям**, **элементарным работам**) проекта, а вершины графа изображают абстрактные **события**, обозначающие начало или конец этапов; причем этапы, соответствующие дугам, исходящим из произвольной вершины графа, не могут начаться прежде, чем закончатся этапы (т.н. **опорные работы**), отвечающие дугам, заходящим в данную вершину. В проектно-конструкторских организациях подобный граф называют **сетевым графиком**.

Очевидно, что рассматриваемый граф является ациклическим.

Например, при строительстве здания в качестве этапов могут рассматриваться закладка фундамента, возведение стен, возведение крыши, вставка окон и т.д., а в качестве событий — начало строительства, окончание возведения фундамента, начало отделочных работ, окончание строительства и т.п.

Пример. Рассмотрим построение сетевого графика для планирования производства некоторого изделия. Перечень элементарных работ, их длительность и логических связей (т.е. отношение непосредственного предшествования) представлены в таблице.

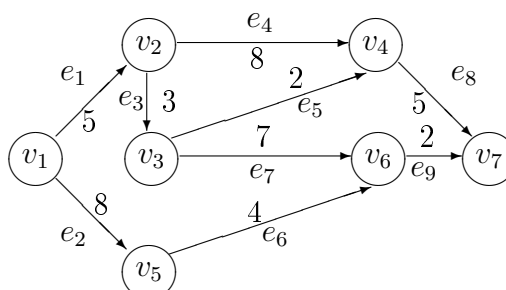
Этап проекта (элементарная работа)	Обозначение	Опорные работы	Время выполнения
Разработка технического задания	e_1	—	5
Конструирование оснастки	e_2	—	8
Разработка электросхемы	e_3	e_1	3
Разработка сборочных чертежей	e_4	e_1	8
Разработка технологии сборки	e_5	e_3	2
Изготовление оснастки	e_6	e_2	4
Монтаж электросхемы	e_7	e_3	7
Сборка изделия	e_8	e_4, e_5	5
Окраска изделия	e_9	e_6, e_7	2

Дуги сетевого графика мы будем обозначать так же, как и соответствующие работы. Источник графа будет соответствовать началу выполнения проекта, а сток — окончанию.

Из таблицы видно, что работы e_1 и e_2 являются начальными (у них нет предшествующих работ), а работы e_8 и e_9 — завершающими (они не предшествуют никаким другим). Таким образом, дуги e_1 и e_2 будут начинаться в источнике графа, а дуги e_8 и e_9 — заканчиваться в стоке.

По окончании работы e_1 начинаются работы e_3 и e_4 — значит, в графе конец дуги e_1 будет служить началом дуг e_3 и e_4 . Аналогично, конец дуги e_3 — начало дуг e_5 и e_7 . Поскольку работе e_8 непосредственно предшествуют работы e_4 и e_5 , в графе должна быть вершина, служащая концом дуг e_4 и e_5 и началом дуги e_8 .

Продолжая подобные рассуждения, в конце концов получаем следующий сетевой график.



Будем считать, что задано конкретное время выполнения каждого этапа² — вес дуги $t(v_i, v_j)$.

В задаче сетевого планирования и управления³ требуется найти минимальное время выполнения проекта — время, за которое можно пройти по всем дугам графа, двигаясь от начальной вершины (s) к конечной вершине (t), причем движение по каждой дуге может начаться лишь после того, как пройдены все дуги, заходящие в ее начало. Другими словами, нужно найти самый длинный путь (т.е. путь наибольшего веса) от s к t .

Для решения данной задачи можно модифицировать алгоритм Дейкстры нахождения кратчайшего пути от s к t : заменить ∞ на 0 , $<$ на $>$, $\min$ на $\max$. Мы опишем более эффективный алгоритм, учитывающий ацикличность графа.

Пронумеруем вершины орграфа $G = \langle V, A \rangle$ так, чтобы каждая дуга (v_i, v_j) ($i, j = 1, \dots, n$) вела из вершины с меньшим номером в вершину с большим номером: $(v_i, v_j) \in A \Rightarrow i < j$ (в силу ацикличности это всегда возможно⁴). Через $l(v_i)$ обозначим наиболее раннее время начала операций, соответствующих дугам, исходящим из вершины v_i (считая $l(v_1) = 0$), иными словами, $l(v_i)$ — длина самого длинного пути из v_1 в v_i . Минимальное время выполнения проекта тогда будет равно $l(v_n)$. Алгоритм состоит в последовательном вычислении $l(v_j)$ ($j = 2, \dots, n$) по очевидной формуле:

$$l(v_j) = \max_{v_i \in \Gamma^{-1}(v_j)} (l(v_i) + t(v_i, v_j))$$

с нулевыми начальными условиями: $\forall i \quad l(v_i) = 0$.

Пример. Для сетевого графика, построенного выше, в результате работы алгоритма находим:

$$\begin{aligned} l(v_1) &= 0, \quad l(v_2) = 5, \quad l(v_3) = 8, \\ l(v_4) &= \max(l(v_2) + t(v_2, v_4), l(v_3) + t(v_3, v_4)) = \max(5 + 8, 8 + 2) = 13, \quad l(v_5) = 8, \\ l(v_6) &= \max(l(v_3) + t(v_3, v_6), l(v_5) + t(v_5, v_6)) = \max(8 + 7, 8 + 4) = 15, \\ l(v_7) &= \max(l(v_4) + t(v_4, v_7), l(v_6) + t(v_6, v_7)) = \max(13 + 5, 15 + 2) = 18. \end{aligned}$$

Таким образом, если считать, что время выполнения работ проекта было задано в днях, то минимальное время выполнения всего проекта равно 18 дням.

Иллюстрация работы алгоритма

Путь наибольшей длины от начальной вершины графа к конечной называют **критическим путем**. В рассмотренном примере критическим

²В более общем случае время выполнения этапа — *случайная величина*.

³В англоязычной литературе принят термин PERT (Project Evaluation Research Task).

⁴Алгоритм такой нумерации можно найти в [18].

является путь $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_4 \rightarrow v_7$. В общем случае, в графе может быть несколько критических путей. Для того, чтобы проект был выполнен за минимальное время, операция, отвечающая каждой дуге критического пути, должна начинаться сразу после того, как закончится предшествующая ей операция (на указанном пути). Если дуга не принадлежит никакому критическому пути, то соответствующая ей операция может начать выполняться с некоторым запаздыванием, которое не отразится на общем времени выполнения проекта. Обозначим через $L(v_i)$ самое позднее время начала операций, отвечающих дугам, исходящим из вершины v_i , при котором весь проект всё ещё может быть выполнен за минимальное время. Для нахождения $L(v_i)$ поменяем ориентацию каждой дуги (при этом поменяются местами начальная и конечная вершины) и, повторив предыдущий алгоритм, найдем $l'(v_i)$ — самый длинный путь от v_n до v_i ; нетрудно видеть, что $L(v_i) = l(v_n) - l'(v_i)$. Теперь для каждой операции (v_i, v_j) можно определить **резерв времени** $r(v_i, v_j)$ — на сколько единиц времени можно отложить начало ее выполнения, чтобы проект мог быть выполнен за минимальное время (при отсутствии других задержек): $r(v_i, v_j) = L(v_j) - l(v_i) - t(v_i, v_j)$.

Для последнего примера имеем:

i	1	2	3	4	5	6	7
$l(v_i)$	0	5	8	13	8	15	18
$l'(v_i)$	18	13	9	5	6	2	0
$L(v_i)$	0	5	9	13	12	16	18

Для расчёта резервов времени работ, не входящих в критический путь, составим таблицу.

$v_i v_j$	$L(v_j)$	$l(v_i)$	$t(v_i v_j)$	$r(v_i, v_j) = L(v_j) - l(v_i) - t(v_i, v_j)$
$v_2 v_3$	9	5	3	1
$v_3 v_4$	13	8	2	3
$v_3 v_6$	16	8	7	1
$v_1 v_5$	12	0	8	4
$v_5 v_6$	16	8	4	4
$v_6 v_7$	18	15	2	1

В заключение раздела заметим, что более детальное и подробное изложение теории сетевого планирования (включающее в себя, в частности, предположение о том, что время выполнения каждой работы является случайной величиной с своим законом распределения) содержится в специальных руководствах (см., например, [10]).

Тема 2.7. Потоки в сетях

Деятельность современного общества тесно связана с разного рода сетями: транспортными, информационными, распределения товаров и т.д. Поэтому математическое моделирование и математический анализ таких сетей имеют большое теоретическое и практическое значение.

Ориентированные графы являются удобным средством изучения сетей.

Сначала введём некоторые новые определения.

Петля в орграфе — дуга вида (u, u) . Пусть $G = \langle V, A \rangle$ — оргграф без петель, имеющий единственный источник (будем обозначать его v_1) и единственный сток (v_n). Все остальные вершины графа будем называть **промежуточными**. Если каждой дуге графа $a \in A$ поставлено в соответствие неотрицательное целое число $c(a)$ (**пропускная способность дуги**), то говорят, что задана **транспортная сеть** (или просто: **сеть**) $\langle G, c \rangle$.

Функция $\varphi : A \rightarrow N_0$ (определенная на мультимножество дуг оргграфа и принимающая неотрицательные целые значения) называется **поток** **в сети** $\langle G, c \rangle$, если выполняются следующие условия:

- 1) для любой дуги $a \in A$ $\varphi(a) \leq c(a)$;
- 2) для любой промежуточной вершины графа v

$$\sum_{u \in \Gamma^{-1}(v)} \varphi(u, v) = \sum_{u \in \Gamma(v)} \varphi(v, u).$$

Величину $\varphi(a)$ будем называть **поток** **по дуге** a .

Таким образом,

- поток по каждой дуге не должен превышать ее пропускной способности;
- сумма потоков по дугам, заходящим в произвольную промежуточную вершину, равен сумме потоков по дугам, исходящим из этой вершины. Другими словами, поток не возникает и не накапливается в промежуточных вершинах.

Данная математическая модель описывает поведение газа или жидкости в трубопроводе, транспортные потоки в сети дорог, пересылку товаров на рынок по различным каналам и т.д.

Величиной потока $W(\varphi)$ назовем сумму потоков по дугам, исходящим из источника:

$$W(\varphi) = \sum_{v \in \Gamma(v_1)} \varphi(v_1, v).$$

Покажем, что она равна сумме потоков по дугам, заходящим в сток. Действительно, суммируя равенства из условия 2) потока по всем промежуточным вершинам, получаем:

$$\sum_{v \in V \setminus \{v_1, v_n\}} \sum_{u \in \Gamma^{-1}(v)} \varphi(u, v) = \sum_{v \in V \setminus \{v_1, v_n\}} \sum_{u \in \Gamma(v)} \varphi(v, u).$$

Если вычесть из обеих частей равенства потоки через дуги, оба конца каждой из которых являются промежуточными вершинами (каждый такой поток слева и справа от знака равенства встречается ровно один раз), то получим:

$$W(\varphi) = \sum_{v \in \Gamma(v_1)} \varphi(v_1, v) = \sum_{v \in \Gamma^{-1}(v_n)} \varphi(v, v_n).$$

Поток в транспортной сети, имеющий наибольшую возможную величину, называют **максимальным потоком**. В одной и той же сети может быть несколько максимальных потоков (их величины, разумеется, должны совпадать).

Пусть φ — поток в сети $\langle G, c \rangle$. Дуга $a \in A$ называется **насыщенной**, если поток по ней равен ее пропускной способности: $\varphi(a) = c(a)$. Поток φ называется **полным**, если любой путь в орграфе G из v_1 в v_n содержит по меньшей мере одну насыщенную дугу. Очевидно, что всякий максимальный поток является полным (иначе увеличив потоки по ненасыщенным дугам, составляющим путь $v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$, на 1, мы не нарушим условий 1) и 2) потока и получим поток с большей на 1 величиной, чем у данного потока).

В дальнейшем будем считать, что оргграф $G = \langle V, A \rangle$ — *антисимметрический*, т.е. он не содержит кратных дуг и если $(u, v) \in A$, то $(v, u) \notin A$. Это предположение не является сильно ограничительным, поскольку **подразбиением** дуг (введением дополнительных "фиктивных" вершин) всегда можно по данной сети построить сеть с антисимметрическим оргграфом и той же величиной потока.

Максимальный поток можно найти с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм Л. Форда – Д. Фалкерсона (1954 г.)

1. Построить произвольный поток φ в сети $\langle G, c \rangle$ (можно и нулевой).
2. Построить полный поток. Если поток φ не полный, то в сети существует путь из v_0 в v_n , все дуги которого не насыщены. Увеличивая потоки через все дуги такого пути P на величину $\min_{a \in P} (c(a) - \varphi(a))$,

получаем путь, некоторая дуга которого является насыщенной. Такую операцию следует повторять до тех пор, пока не получится полный поток.

3. Построить максимальный поток.

А. Начальные пометки. Присвоить источнику пометку 0:

$l(v_1) = 0$, а остальным вершинам пометку ∞ .

Следующий шаг повторять до тех пор, пока в результате его выполнения не будет помечен сток v_n либо пока не перестанут появляться новые пометки.

Б. Пересчет пометок. Для каждой помеченной вершины v_i , помечить символом $+i$ все непомеченные вершины v ($l(v) = \infty$), для которых дуги (v_i, v) ненасыщенные (т.е. $\varphi(v_i, v) < c(v_i, v)$), и символом $-i$ все непомеченные вершины, для которых $\varphi(v, v_i) > 0$.

В. Увеличение потока. Если сток v_n не получает новую пометку, то закончить работу алгоритма (максимальный поток найден), в противном случае существует цепь (заметьте: в общем случае — не *путь*!) $v_0 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$, все вершины которой помечены. Если ориентация дуги $a = (v_i, v_j)$ совпадает с направлением прохождения цепи, будем обозначать ее $\vec{a}$, в противном случае — $\overleftarrow{a}$. Если $l(v_j) = +i$ ($\vec{a} = (v_i, v_j)$), то положить $\lambda(a) = c(a) - \varphi(a)$. Если $l(v_j) = -i$ ($\overleftarrow{a} = (v_j, v_i)$), то положить $\lambda(a) = \varphi(a)$. Пусть $\varepsilon = \min(\lambda(a))$ (минимум вычисляется по всем дугам, составляющим указанную цепь). По каждой дуге $\vec{a}$ поток увеличить на ε , а по каждой дуге $\overleftarrow{a}$ поток уменьшить на ε . (При этом величина потока в сети $W(\varphi)$ увеличится на ε). Перейти к шагу **А**.

Перед тем, как обосновать алгоритм Форда – Фалкерсона, проиллюстрируем его работу на примере (см. рис. 5, на котором насыщенные дуги помечены значком "х"). Начальный поток не является полным. В пути $v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_6$ все дуги не насыщены; увеличение потока, проходящего через этот путь, на 2 приводит к насыщению дуги $v_3 \rightarrow v_4$. Находим, ещё один путь $(v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_5 \rightarrow v_6)$, состоящий из ненасыщенных дуг; увеличение потока через каждую из этих дуг на 1 делает дугу $v_3 \rightarrow v_5$ насыщенной. Теперь получен полный поток.

Переходим к 3-му этапу алгоритма Форда – Фалкерсона. Расставляем пометки вершин, как показано на рис. 5г). Получаем цепь

$$v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_2 \rightarrow v_4 \rightarrow v_6.$$

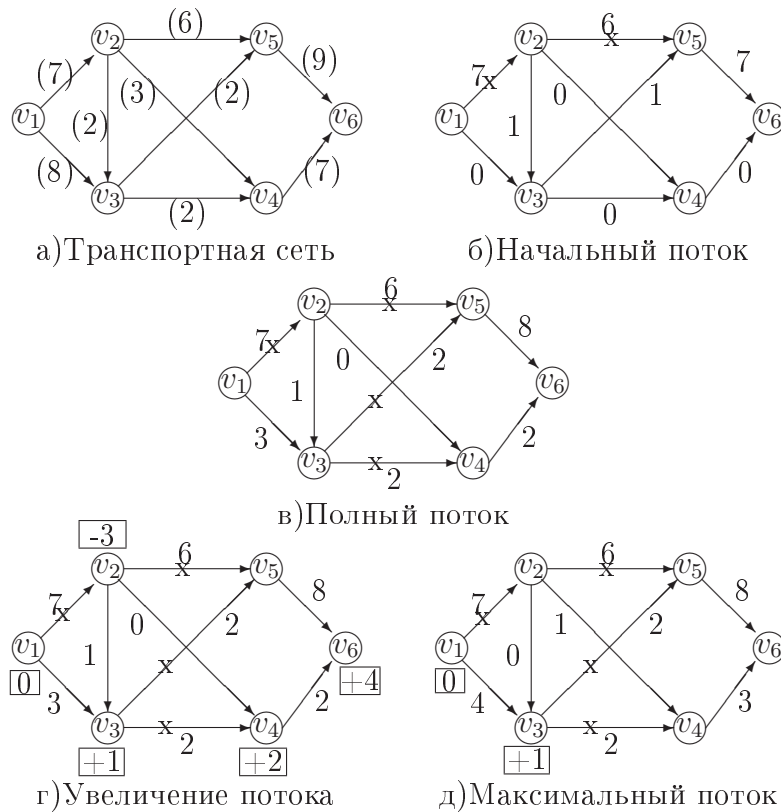


Рис. 5: Алгоритм Форда – Фалкерсона нахождения максимального потока

Имеем:

$$\lambda(\overrightarrow{v_1, v_3}) = 5; \lambda(\overrightarrow{v_3, v_2}) = 1; \lambda(\overrightarrow{v_2, v_4}) = 3; \lambda(\overrightarrow{v_4, v_6}) = 5; \varepsilon = 1.$$

Уменьшаем поток на 1 через дугу (v_2, v_3) и увеличиваем его на 1 через остальные дуги этой цепи. При повторении процедуры (рис. 5д)) удастся пометить только две вершины $(v_1$ и $v_3)$. Максимальный поток найден: $W(\varphi) = 11$.

Иллюстрация работы алгоритма Форда – Фалкерсона

Доказательство корректности алгоритма Форда – Фалкерсона

Так как количество различных (целочисленных) потоков в фиксированной транспортной сети конечно, максимальный поток *существует*. Поскольку в результате каждой итерации алгоритма Форда – Фалкерсона величина потока увеличивается по меньшей мере на 1, алгоритм работает *конечное время*, т.е. рано или поздно прекратит свою работу. Осталось доказать, что поток, который он строит, является максимальным.

Введём ряд новых понятий. Пусть B — некоторое множество вершин орграфа $G = \langle V, A \rangle$, не содержащее источник и содержащее сток ($B \subset V, v_1 \notin B, v_n \in B$). **Разрезом сети $\langle G, c \rangle$ относительно B** называется множество A_B^- дуг, исходящих из вершин, не принадлежащих B , и заходящих в вершины из B : $A_B^- = \{(u, v) \in A \mid u \notin B, v \in B\}$. Сумма пропускных способностей всех дуг разреза называется **пропускной способностью разреза**: $c(A_B^-) = \sum_{a \in A_B^-} c(a)$. Разрез с минимальной пропускной способностью называют **минимальным разрезом**. Из "физических" соображений кажется почти очевидным, что *величина потока в сети не превосходит пропускной способности любого разреза* (значит, и минимального). Для строгого доказательства этого факта нам понадобится

Лемма 3. *Для любого множества B вершин орграфа G , среди которых есть сток и нет источника, справедливо следующее равенство:*

$$\sum_{a \in A_B^-} \varphi(a) - \sum_{a \in A_B^+} \varphi(a) = W(\varphi), \quad (1)$$

где $A_B^- = \{(u, v) \in A \mid u \notin B, v \in B\}$, $A_B^+ = \{(u, v) \in A \mid u \in B, v \notin B\}$.

Доказательство. Прибавив к уменьшаемому и вычитаемому в разности (1) сумму потоков по всем дугам, исходящим из B и заходящим в B , получим равенство, равносильное (1):

$$\sum_{(u,v) \in A, v \in B} \varphi(u, v) - \sum_{(u,v) \in A, u \in B} \varphi(u, v) = W(\varphi). \quad (2)$$

Вклад стока v_n в левую часть (2) равен $W(\varphi)$, а вклад каждой из остальных вершин из множества B (так как среди них нет и источника, все они — промежуточные) равен 0 в силу условия 2) потока. Соотношение (2), а вместе с ним и (1), доказано.

Дальнейшее рассуждение очевидно:

$$W(\varphi) = \sum_{a \in A_B^-} \varphi(a) - \sum_{a \in A_B^+} \varphi(a) \leq \sum_{a \in A_B^-} \varphi(a) \leq \sum_{a \in A_B^-} c(a) = c(A_B^-).$$

Итак, мы выяснили, что величина потока в сети не превосходит пропускной способности минимального разреза. После окончания работы алгоритма Форда – Фалкерсона в сети не существует цепи $v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$, вдоль которой возможно увеличение потока. Пусть B — множество вершин, которые не получают (конечной) пометки на последней итерации алгоритма. Заметим, что $v_1 \notin B, v_n \in B$. Рассмотрим разрез сети относительно B .

Пусть u — помеченная вершина ($u \notin B$), а v — непомеченная ($v \in B$). Если дуга имеет вид (u, v) , то согласно алгоритму эта дуга является насыщенной: $\varphi(u, v) = c(u, v)$. Если дуга имеет вид (v, u) , то согласно алгоритму поток по этой дуге равен нулю: $\varphi(v, u) = 0$. Применим теперь лемму 3. :

$$W(\varphi) = \sum_{a \in A_B^-} \varphi(a) - \sum_{a \in A_B^+} \varphi(a) = \sum_{a \in A_B^-} c(a) = c(A_B^-).$$

Таким образом, в результате работы алгоритма построен поток, величина которого *равна* пропускной способности некоторого разреза сети; поэтому поток — максимальный. Мы доказали следующее утверждение:

Теорема 19. *Величина максимального потока в сети равна пропускной способности минимального разреза.*

В заключение параграфа — несколько замечаний.

1. Если величина пропускной способности дуги не обязательно является неотрицательным целым числом, то, как показали сами Форд и Фалкерсон, если "неудачно" выбирать *увеличивающие цепи*, то процесс выполнения алгоритма может никогда не кончиться, более того, величина текущего потока может все время не превосходить четверти максимального потока [18]. В той же книге [18] приводится эффективный (и весьма изощренный) алгоритм нахождения максимального потока и в этом случае, его трудоемкость $O(n^3)$.

2. Можно рассмотреть и более общую постановку задачи, допускающую наличие в сети нескольких источников и стоков. В этом случае следует ввести *фиктивный* источник, от которого идут дуги к (настоящим) источникам (последние перейдут в разряд промежуточных вершин), и *фиктивный* сток, к которому идут дуги от (настоящих) стоков (также становящихся промежуточными вершинами). Так задача будет сведена к задаче с одним источником и одним стоком.

3. В книге [14] обсуждаются и другие задачи о потоках в сетях; например, поток по дуге может быть ограничен не только сверху, но и снизу.

Практикум

Комбинаторика

Сочетания

1. Вычислить: C_7^2 , C_{20}^0 , C_{40}^1 , C_{35}^{35} , C_8^4 , C_{15}^{13} .

2. Найти число подмножеств X множества $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, обладающих следующими свойствами:

- 1) $|X| = 3$;
- 2) $|X| = 5$, $1 \in X$;
- 3) $|X| = 6$, $2 \notin X$;
- 4) $|X| = 7$, $\{0, 1\} \subset X$, $2 \notin X$;
- 5) множество X состоит из трёх чётных и двух нечётных чисел;
- 6) $|X| \leq 5$.

3. На окружности последовательно отмечены точки $A_1, \dots, A_{12}$. Сколько существует

- 1) хорд с концами в отмеченных точках;
- 2) треугольников с вершинами в отмеченных точках;
- 3) выпуклых четырёхугольников с вершинами в отмеченных точках;
- 4) треугольников с вершинами в отмеченных точках, не имеющих общих точек с прямой A_2A_8 ;
- 5) треугольников с вершинами в отмеченных точках, имеющих общие точки с прямой A_1A_5 ?

4. На окружности отмечено n точек. Точки соединяются всевозможными хордами; известно, что никакие три из них не пересекаются в одной точке внутри круга. Найти:

- 1) число точек пересечения хорд внутри круга;
- 2) количество частей, на которые хорды делят круг.

5. На прямой l отмечено 8 точек, а на параллельной ей прямой m ($l \neq m$) — 11 точек. Сколько существует

- 1) треугольников с вершинами в отмеченных точках;
- 2) выпуклых четырёхугольников с вершинами в отмеченных точках?

6. n человек в совокупности выписывают k журналов, причём каждый выписывает два журнала, каждый журнал выписывают четверо, а каждая пара журналов выписывается только одним человеком. Найти n и k .

7. Две команды играют в волейбол до 4 побед. Сколько существует разных вариантов изменения счёта в игре по партиям?

8. Сколькими способами можно разложить 4 белых и 3 чёрных шара по 6 различным ящикам?

9. Решить предыдущую задачу при дополнительном условии: ни один ящик не должен быть пустым.

10. Сколькими способами можно разложить 20 одинаковых шаров по 5 различным ящикам так, чтобы

- 1) в каждом ящике оказалось не менее двух шаров;
- 2) в каждом ящике оказалось не более 5 шаров;
- 3) оказалось не более двух пустых ящиков?

11. Найти коэффициент при x^{100} в разложении многочлена

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{100})^3.$$

12. Дан квадрат. Каждая его сторона разбита на n равных частей. Через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. Сколько существует 1) прямоугольников, 2) квадратов, ограниченных проведёнными линиями?

13. В правлении банка 7 человек. Каково должно быть минимальное число замков от сейфа и как следует распределить ключи между членами правления (каждый член правления может получить ключи от нескольких замков), чтобы любое большинство сейф могло открыть, а любое меньшинство — не могло?

14. Каким числом способов можно прочитать слово "абракадабра", двигаясь вправо или вниз по таблице?

А	Б	Р	А	К	А
Б	Р	А	К	А	Д
Р	А	К	А	Д	А
А	К	А	Д	А	Б
К	А	Д	А	Б	Р
А	Д	А	Б	Р	А

15. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник $ABCD$, стороны которого лежат на линиях сетки, причём длина отрезка AD в k раз больше длины отрезка AB (k — натуральное число). Рассматриваются всевозможные пути, проходящие по линиям сетки и кратчайшим образом ведущие из A в C . Доказать, что среди этих путей в k раз больше тех, у которых первое звено лежит на AD , чем тех, у которых первое звено лежит на AB .

16. Изучите поведение последовательности (a_k) , где $a_k = C_n^k$ (при фиксированном n), с точки зрения возрастания-убывания.

17. Имеется карточная колода из 52 карт. Каким числом способов можно раздать по 13 карт четырём игрокам?

Полиномиальная формула

18. Найти коэффициент при x^k в разложении многочленов:

- 1) $(x+2)^{10}$, $k=3$;
- 2) $(1-2x)^7$, $k=4$;
- 3) $(\sqrt{x} - \frac{2}{x})^8$, $k=-5$;
- 4) $(3\sqrt[3]{x^2} - x\sqrt{x})^9$, $k=11$;
- 5) $(x^2 - x + 2)^8$, $k=7$;
- 6) $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})^6$, $k=2$.

Комбинаторные тождества

19. С помощью формулы бинома Ньютона

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$$

доказать следующие тождества:

- | | |
|---|--|
| 1) $\sum_{k=0}^n 9^k C_n^k = 10^n$; | 2) $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} 2^k C_n^k = 1$; |
| 3) $\sum_{k=0}^n k C_n^k = n 2^{n-1}$; | 4) $\sum_{k=0}^n (-1)^{k-1} k C_n^k = 0$; |
| 5) $\sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$; | 6) $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$; |
| 7) $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k (C_{2n}^k)^2 = (-1)^n C_{2n}^n$; | 8) $\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k (C_{2n-1}^k)^2 = 0$. |

20. С помощью комбинаторных рассуждений доказать:

- 1) $\sum_{k=0}^n k C_n^k = n 2^{n-1}$;
- 2) $\sum_{k=m}^{n-r+m} C_k^m C_{n-k}^{r-m} = C_{n+1}^{r+1}$.

Формула включения-исключения

21. На кафедре лингвистики работают 13 человек, причём каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Десять человек знают английский язык, семеро — немецкий, шестеро — французский. Пятеро знают английский и немецкий, четверо — английский и французский, трое — немецкий и французский. Сколько человек знают 1) все три языка; 2) ровно два языка; 3) только английский язык?

22. В книге [29] предлагается для решения следующая задача.

В группе из 25 студентов 12 изучают латынь, 10 — греческий и 9 — санскрит. Для каждой из двух языков найдётся ровно пять студентов, изучающих оба эти языка. Сколько студентов изучают все три языка?

Корректна ли эта задача?

23. 1. Показать, что количество натуральных чисел, делящихся на n и не превосходящих положительного числа x , равно $[x/n]$.

2. Сколько есть чисел, не превосходящих 10000 и не делящихся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

3. Сколько есть четырёхзначных чисел, не делящихся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

4. Сколько есть чисел, не превосходящих 10000 и не делящихся ни на одно из чисел 6, 10 и 15?

5. Показать, что если $n = 30t$, то количество натуральных чисел, не превосходящих n и не делящихся ни на одно из чисел 6, 10 и 15, равно $22t$.

24. Пусть $n > 5$. Показать, что простых чисел в множестве $\{n + 1, n + 2, \dots, n + 30\}$ не больше восьми.

25. На каждой стороне треугольника ABC отмечено по n точек, разбивающих её на $n + 1$ равных частей. Рассмотрим всевозможные треугольники с вершинами в отмеченных точках (по одной на каждой стороне). Сколько среди этих треугольников таких, у которых ни одна из сторон не параллельна стороне треугольника ABC ?

26. Сколько существует 6-значных номеров (первые цифры могут быть и нулями) с суммой цифр 27?

27. В кошельке лежит по 20 монет достоинством в 1, 2 и 5 рублей. Сколькими способами можно из этих 60 монет выбрать k монет?

Задача о беспорядках и встречах

28. С помощью рекуррентных соотношений найти число беспорядков D_n для $n = 1, \dots, 8$.

29. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 одинаковых ладей так, чтобы никакие две из них не били друг друга и чтобы ни одна ладья не стояла на главной диагонали?

30. Сколькими способами можно раскрасить клетки шахматной доски 8×8 в 8 цветов так, чтобы клетки, имеющие общую сторону, были бы окрашены в разные цвета и чтобы в каждом горизонтальном ряду встречались все 8 цветов?

31. Две колоды карт, содержащие по 52 карты, тщательно тасуются, после чего сравниваются карта за картой. Какова вероятность того, что не будет ни одной пары совпадающих карт?

32. Для числа перестановок n элементов с k встречами $D_{n,k}$ доказать тождества:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{k=0}^n D_{n,k} &= n!; & 2) D_{n,k} &= \frac{n}{k} D_{n-1,k-1} \quad (k = 1, \dots, n); \\ 3) \sum_{k=1}^n k D_{n,k} &= n!; & 4) \sum_{k=0}^n C_n^k D_k &= n!; \\ 5) \sum_{k=m}^n C_k^m D_{n,k} &= \frac{n!}{m!}; & 6) \sum_{k=0}^n (k-1)^2 D_{n,k} &= n!. \end{aligned}$$

33. Случайным образом выбирается перестановка чисел $1, 2, \dots, n$. Пусть ξ — количество элементов, остающихся на своих местах. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ .

34. Секретарше нужно отправить n различных писем по n различным адресам. Она подписывает конверты и случайным образом вкладывает письма в конверты. Сколько в среднем писем дойдет до своего адресата?

Рекуррентные соотношения

35. Найти формулу общего члена последовательности:

1) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$; $a_1 = 10$, $a_2 = 16$;

2) $a_{n+2} = 2 \cos \alpha a_{n+1} - a_n$; $a_1 = \cos \alpha$, $a_2 = \cos 2\alpha$.

36. Найти количество n -значных чисел, состоящих из цифр 1, 2, 3, в которых первая и последняя, а также любые две соседние цифры различны.

37. Сколько существует раскрасок вершин n -угольника, если соседние вершины должны быть разного цвета, а всего имеется k цветов?

38. Найти $ax^4 + by^4$, если

$$1) \begin{cases} a+b = 1, \\ ax+by = 1, \\ ax^2+by^2 = 2, \\ ax^3+by^3 = 3; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} a+b = 1, \\ ax+by = 2, \\ ax^2+by^2 = 5, \\ ax^3+by^3 = 14; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} a+b = 23, \\ ax+by = 79, \\ ax^2+by^2 = 217, \\ ax^3+by^3 = 691. \end{cases}$$

39. Найти общие решения рекуррентных соотношений:

1) $a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 0$;

2) $a_{n+3} + 10a_{n+2} + 32a_{n+1} + 32a_n = 0$;

3) $a_{n+3} + 3a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0$.

40. Найти a_n по рекуррентным соотношениям и начальным условиям:

1) $a_{n+3} - 3a_{n+2} + a_{n+1} - 3a_n = 0$, $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_3 = 27$;

2) $a_{n+3} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$, $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$.

41. Чёрт предложил карточному шулеру: "Каждый раз, как ты перейдёшь мост и вернешься обратно, твои деньги в кармане удвоятся, но за это ты мне заплатишь в первый раз 50 руб, во второй — 100 руб, в третий — 150 руб и т.д." Шулер прошёл по мосту 17 раз вперед и назад. Сначала он значительно обогащался, однако затем не только спустил то, что приобрел, но даже остался должен чёрту 360 руб 72 коп. Сколько денег у шулера было изначально? Как бы изменилась ситуация, если бы этих денег было на копейку больше?

(Журнал "Математический вестник", 1914 г.)

Числа Фибоначчи

Последовательность чисел Фибоначчи (f_n) задается соотношениями: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $\forall n \in \mathbf{N}_0$ $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

42. Прыгун перемещается слева направо вдоль клетчатой ленты, совершая прыжки на одну или две клетки. Каким числом способов он может переместиться из 1-й клетки в n -ю?

43. Доказать следующие утверждения:

- 1) $f_1 + f_3 + \dots + f_{2n+1} = f_{2n+2}$;
- 2) $1 + f_2 + f_4 + \dots + f_{2n} = f_{2n+1}$;
- 3) $f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$;
- 4) $f_k f_{k+1} - f_{k-1} f_k = f_k^2$;
- 5) $f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$;
- 6) $1 - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + (-1)^n \frac{1}{f_{n-1} f_n} = \frac{f_{n-1}}{f_n}$;
- 7) $f_{n+m} = f_{n-1} f_m + f_n f_{m+1}$;
- 8) $f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2$;
- 9) $f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1}$;
- 10) $f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3 = f_{3n}$;
- 11) если n делится на m , то f_n делится на f_m ;
- 12) для наибольшего общего делителя двух чисел Фибоначчи справедливо соотношение $(f_n, f_m) = f_{(n,m)}$;
- 13) если $m > 2$ и f_n делится на f_m , то n делится на m .
44. Доказать тождество $\sum_{k=0}^{[n/2]} C_{n-k}^k = f_{n+1}$.
45. Вычислить трёхдиагональный определитель размера $n \times n$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

46. Доказать, что $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$.
47. Доказать тождество $f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$.
48. Продолжив последовательность чисел Фибоначчи влево (сохраняя рекуррентное соотношение), докажите, что $f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n$.
49. Доказать тождества
 - 1) $f_{n+k} \cdot f_{m-k} - f_n \cdot f_m = (-1)^n \cdot f_{m-n-k} \cdot f_k$;
 - 2) [Кассини, 1680 г.] $f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$;

- 3) $2f_n^2 = f_{n-2} \cdot f_{n+2} + f_{n-1} \cdot f_{n+1}$;
4) $f_{n+1}f_{n+2} - f_nf_{n+3} = (-1)^n$.

50. Найти число двоичных последовательностей длины n , не содержащих единиц ни в каких двух соседних позициях.

51. Доказать, что из p нулей и q единиц можно составить C_{p+1}^q различных последовательностей, в каждой из которых нигде не окажется рядом две единицы.

52. С помощью двух предыдущих задач дать комбинаторное доказательство тождества задачи [44](#).

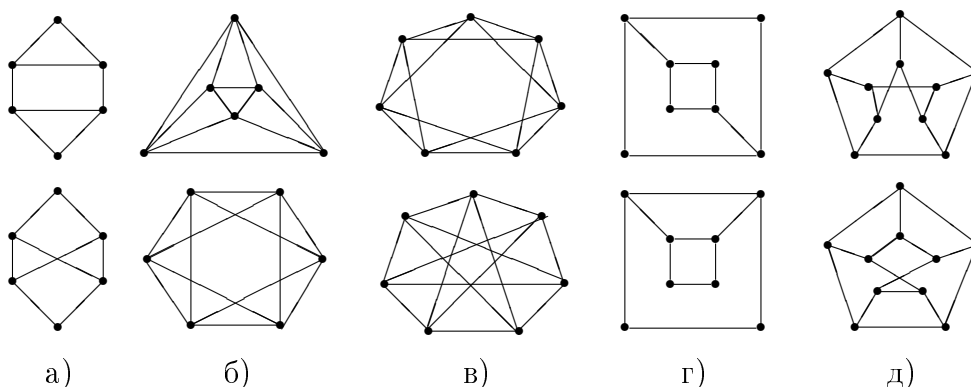
53. Найти число различных покрытий прямоугольника $2 \times n$ прямоугольниками 1×2 .

Теория графов

Определения и примеры

1. Пусть G_n — простой граф с множеством вершин $\{v_1, \dots, v_n\}$, в котором вершины v_i и v_j смежны тогда и только тогда, когда числа i и j взаимно просты. Изобразить графы G_4 и G_6 и найти их матрицы смежности. Показать, что если $m < n$, то $G_m \subset G_n$.

2. Для графов из каждой пары графов, изображенных на рисунке, выяснить, изоморфны ли они.



3. Найти все (с точностью до изоморфизма) простые графы, в которых не более пяти вершин.

4. Сколько существует попарно неизоморфных простых графов с 10 вершинами и 1) 44; 2) 43 рёбрами?

5. Сколько существует помеченных простых графов с n вершинами? Сколько из них имеет m рёбер?

6. Доказать, что в простом графе с не менее чем двумя вершинами найдутся две вершины одинаковой степени.

7. Показать, что рёберные графы $L(K_n)$ и $L(K_{n,m})$ являются регулярными.

8. Доказать, что при $n > 2$ звёздный граф $K_{1,n}$ не является рёберным графом.

9. Пусть $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ — степени вершин графа G . Сколько вершин и рёбер содержит рёберный граф $L(G)$?

10. Привести примеры (когда это возможно)

- 1) двудольного графа, являющегося регулярным;
- 2) кубического графа с 9 вершинами;

3) (для каждого n) простого графа с n вершинами и $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ рёбрами;

4) (для каждого n) простого графа с n вершинами, изоморфного своему рёберному графу;

5) связных графов, являющихся регулярными графами степени 4.

11. Какие из платоновых графов являются двудольными?

12. [Теорема Кёнига.] *Граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его циклы имеют чётную длину.* Доказать.

13. Доказать, что в непустом двудольном регулярном графе доли содержат равное число вершин.

14. Может ли регулярный степени выше 1 двудольный граф иметь мосты?

15. В связном графе степени четырёх вершин равны 3, а степени остальных вершин равны 4. Доказать, что нельзя удалить ребро так, чтобы граф распался на две изоморфные компоненты связности.

16. Найти дополнения к графам, соответствующим тетраэдру, кубу и октаэдру.

17. Вычислить

1) $C_4 + N_2$; 2) $K_n + K_m$; 3) $\overline{K_{n,m}}$; 4) $\overline{G + H}$ (G и H — простые графы).

18. Пусть G , H и K — простые графы; доказать или опровергнуть следующие равенства:

1) $G \cup (H + K) = (G \cup H) + (G \cup K)$;

$$2) G + (H \cup K) = (G + H) \cup (G + K).$$

19. Найти матрицы смежности графов K_n , N_n и C_n .

20. Чем характерна матрица смежности двудольного графа?

21. Какова связь между матрицами смежности простого графа и его дополнения?

22. Пусть A — матрица смежности регулярного графа степени k . Доказать, что k есть собственное значение матрицы A . Найти отвечающий ему собственный вектор.

23. В графе Петерсена найти циклы длины 5, 6, 8 и 9.

24. В графе Петерсена найти разрезы из 3, 4 и 5 рёбер.

25. Доказать, что дополнение к (простому) несвязному графу есть связный граф.

26. Доказать, что рёберный граф связного графа связан.

27. Пусть G — граф с множеством вершин $\{v_1, \dots, v_n\}$ и матрицей смежности A . Доказать, что число маршрутов длины k из v_i в v_j равно (i, j) -му элементу матрицы A^k . Показать также, что если G — простой граф, то число **треугольников** (циклов длины 3) в G равно $\text{tr } A^3/6$ (где $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ — **след** матрицы A). Верно ли, что число циклов длины 4 равно $\text{tr } A^4/8$?

28. Основываясь на результате предыдущей задачи, предложите алгоритм определения диаметра графа по его матрице смежности.

29. [**Экстремальная теорема Турана.**] Пусть G — простой граф с $2n$ вершинами, не содержащий треугольников. Доказать, что в G не более n^2 рёбер и привести пример, когда эта верхняя граница достигается.

30. Найти максимальное число рёбер в простом графе с $2n + 1$ вершинами, не содержащем треугольников.

31. Найти радиус и диаметр графа Петерсена.

32. **Графом Клебша** называют граф, образованный вершинами, рёбрами и главными диагоналями четырёхмерного куба. Другими словами, в качестве вершин графа Клебша можно рассматривать упорядоченные двоичные наборы $0000, 0001, \dots, 1111$; и вершины являются смежными тогда и только тогда, когда их двоичные представления различаются либо в одном, либо во всех разрядах. Найти радиус и диаметр графа Клебша.

Гамильтоновы и эйлеровы графы

33. Для каких чисел m и n следующие графы являются а) эйлеровыми; б) гамильтоновыми: 1) K_n ; 2) $K_{m,n}$; 3) W_n ?

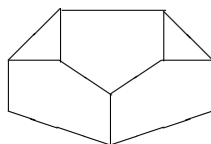
34. Привести пример эйлерова графа, не являющегося гамильтоновым, и гамильтонова графа, не являющегося эйлеровым.

35. Пусть G — двудольный граф, доли которого содержат m и n вершин соответственно. Доказать, что

- 1) если G — гамильтонов граф, то $m = n$;
- 2) если G — полугамильтонов граф, то $|m - n| \leq 1$.

36. Может ли а) конь; б) король; в) ладья побывать на каждой клетке шахматной доски размером 8×8 ровно один раз и последним ходом возвратиться в исходную позицию? Решить такую же задачу для доски 7×7 .

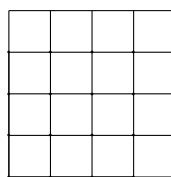
37. Можно ли прогуляться по парку и его окрестностям (см. рис.) так, чтобы при этом перелезть через каждый забор ровно один раз?



38. Доказать, что если граф G связан и имеет $k > 0$ вершин нечётной степени, то минимальное число не имеющих общих рёбер цепей, объединение которых содержит каждое ребро графа G , равно $k/2$.

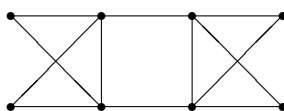
39. Дан кусок проволоки длиной 120 см. Какое наименьшее число раз придется ломать проволоку, чтобы изготовить каркас куба с ребром 10 см?

40. Можно ли сетку, составленную из единичных квадратов,



представить в виде объединения 1) восьми ломаных длины 5; 2) пяти ломаных длины 8?

41. С помощью алгоритма Флёрри найти эйлеров цикл в графе на рисунке.



42. Доказать, что рёберный граф простого эйлера графа является одновременно эйлеровым и гамильтоновым.

43. Доказать, что рёберный граф простого гамильтонова графа является гамильтоновым.

Деревья

44. Найти все (с точностью до изоморфизма) деревья, в которых не более семи вершин.

45. Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника 50×600 клеток. Какое наибольшее количество верёвочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

46. Доказать, что каждое дерево является двудольным графом. Какие деревья являются полными двудольными графами?

47. Если в дереве не менее двух рёбер, то его радиус меньше диаметра. Доказать.

48. Доказать, что центр дерева состоит из одной вершины, если диаметр дерева есть чётное число, и двух вершин в противном случае.

49. Верно ли, что в дереве с нечётным диаметром любые две простые цепи наибольшей длины имеют хотя бы одно общее ребро?

50. Выразите радиус дерева через его диаметр.

51. Пусть n — количество вершин дерева, r — его радиус. Доказать, что $n \geq 2r$.

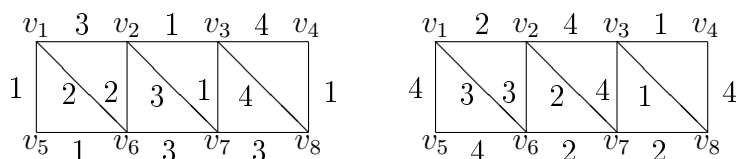
52. Верно ли, что если диаметр графа равен $k > 2$, то граф имеет стягивающее дерево диаметра k ?

53. Пусть T_1 и T_2 — стягивающие деревья связного графа G . Показать, что для любого ребра e из T_1 существует ребро f из T_2 такое, что после "замены" в T_1 ребра e на ребро f вновь получится стягивающее дерево. (С помощью подобной процедуры можно построить последовательность стягивающих деревьев $T_1, \dots, T_2$, в которой каждое дерево получается из предыдущего заменой одного ребра).

54. Доказать, что число рёберно-помеченных деревьев с $n \geq 3$ вершинами (в которых помечены не вершины, а рёбра) равно n^{n-3} .

55. Показать, что при больших n вероятность того, что случайным образом выбранная вершина дерева с n вершинами является висячей, приближенно равна $1/e$.

56. Найти стягивающее дерево минимального веса для каждого графа на рис.



57. Необходимо построить систему нефтепроводов, которые должны соединять семь нефтеочистительных заводов, принадлежащих некоторой компании, с портом (П), куда поступает сырая нефть. Известны предполагаемые ежегодные затраты на эксплуатацию нефтепровода между соответствующими пунктами.

	П	1	2	3	4	5	6	7
П	0	5	6	8	2	6	9	10
1	5	0	4	10	5	8	6	10
2	6	4	0	11	8	4	9	10
3	8	10	11	0	10	3	6	7
4	2	5	8	10	0	2	5	9
5	6	8	4	3	2	0	10	5
6	9	6	9	6	5	10	0	8
7	10	10	10	7	9	5	8	0

Найти систему нефтепроводов, позволяющую осуществлять переброску нефти от порта ко всем заводам с минимальными годовыми эксплуатационными затратами.

Корневые деревья

Дерево с выделенной вершиной (**корнем**) называют **корневым деревом**.

58. Найти число помеченных корневых деревьев с n вершинами.

В книгах, посвященных исследованию структур данных, корневое дерево определяют рекурсивно следующим образом.

Корневое дерево T — это непустое конечное множество T с элементами, называемыми вершинами, такими, что

- 1) имеется выделенная вершина, называемая *корнем* данного дерева;
- 2) если множество остальных вершин непусто, то оно разбивается на m множеств $T_1, \dots, T_m$, каждое из которых в свою очередь является корневым деревом.

Деревья $T_1, \dots, T_m$ называются **поддеревьями** данного корня. Из определения следует, что каждая вершина дерева является корнем некоторого своего дерева. Число поддеревьев дерева с корнем r — **порядок** вершины

*г. Вершины нулевого порядка называют **листьями**; остальные вершины называют **внутренними**.*

59. Сколько листьев имеет дерево с k внутренними вершинами, порядок каждой из которых равен двум?

60. В турнире по олимпийской системе ("проигравший выбывает") участвует n человек. Сколько встреч будет проведено?

61. Некто купил курицу. После того, как она снесла два яйца, её съели. Из яиц вывелись цыплята. Петухов съедали сразу, а куриц — после того, как они сносили по два яйца. И т.д. В какой-то момент вывелись одни петухи, и процесс закончился. Сколько куриц было съедено, если съели 97 петухов?

62. Сколько листьев имеет дерево, в котором (кроме листьев) содержится n_1 вершин порядка 1, n_2 вершин порядка 2, ..., n_s вершин порядка s ?

Ориентированные графы. Алгоритмы

63. Пассажир обращается за услугами к некоторой авиакомпании. Он желает попасть воздушным путём из Челябинска в Бостон, проведя в воздухе как можно меньше времени. Какой граф нужно рассмотреть для решения данной задачи?

64. Пусть A — матрица смежности орграфа с множеством вершин $\{v_1, \dots, v_n\}$. Какой смысл имеют суммы строк и суммы столбцов матрицы A ? Доказать, что (i, j) -й элемент матрицы A^k равен числу путей длины k из v_i в v_j .

65. В дереве с n вершинами рёбра ориентируются случайным образом. Какова вероятность того, что найдётся вершина, из которой ведут пути ко всем остальным вершинам?

66. Пусть G — связный граф. Зафиксируем некоторую его вершину v . Доказать, что можно так ориентировать рёбра графа, что в получившемся орграфе существует путь от v до любой другой вершины.

67. В ориентированном графе со связным основанием для каждой вершины полустепень исхода равна полустепени захода. Доказать, что орграф эйлеров.

68. Фармацевтическая фирма планирует разработать в течение года новый препарат. Разработка его осуществляется в четыре этапа, которые могут проходить в разном темпе и требовать соответственно разных затрат. Соответствующие данные приведены в таблице.

Длительность этапа(мес.) / затраты (у.е.)

темп этап	медленный	нормальный	быстрый
теоретические исследования	5/5	4/7	2/10
лабораторные эксперименты	3/6	2/8	1/12
прохождение экспертизы	6/1	4/1	2/3
сбыт	5/8	4/10	3/15

Найти наиболее экономичный для фирмы способ разработки препарата в течение года.

69. Найти кратчайший путь от 1-й вершины до всех остальных (см. рис. 1, а, б).

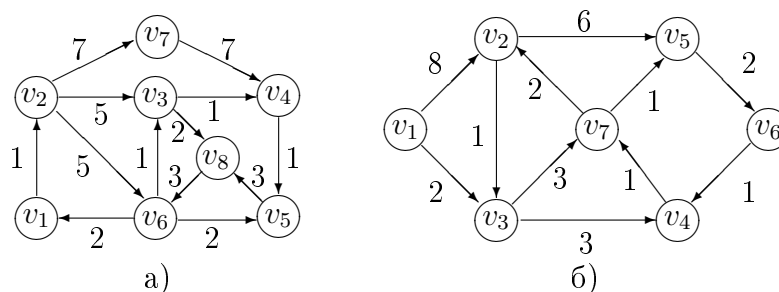


Рис. 1

70. Дана структурно-временная таблица работ по строительству дома.

Этап проекта (элементарная работа)	Обозначение	Опорные работы	Время выполнения
Расчистка участка	e_1	—	1
Закладка фундамента	e_2	e_1	4
Возведение стен	e_3	e_2	4
Монтаж электропроводки	e_4	e_3	3
Штукатурные работы	e_5	e_4, e_9	4
Благоустройство территории	e_6	e_3	6
Отделочные работы	e_7	e_5	4
Настил крыши	e_9	e_3	5

Требуется построить сетевой график, найти наименьшее время выполнения проекта, определить критический путь, вычислить резервы времени для выполнения каждой операции.

71. Дана структурно-временная таблица работ по организации выставки-продажи товаров.

Этап проекта (элементарная работа)	Обозначение	Опорные работы	Время выполнения
Заказ на оборудование и товары	e_1	—	10
Разработка системы учёта спроса	e_2	—	12
Отбор товаров и выписка счётов	e_3	e_1	2
Завоз товаров	e_4	e_3	3
Завоз оборудования	e_5	e_1	5
Установка оборудования	e_6	e_5	6
Выкладка товара	e_7	e_4	6
Учёт наличия товара	e_8	e_4	5
Оформление зала и витрины	e_9	e_6, e_7	5
Изготовление документов учёта	e_{10}	e_2, e_8	4
Репетиция выставки-продажи	e_{11}	e_9, e_{10}	2

Требуется построить сетевой график, найти наименьшее время выполнения проекта, определить критический путь, вычислить резервы времени для выполнения каждой операции.

72. Пусть проекты описываются взвешенными графами (см. рис. 2, а, б), где дуги соответствуют операциям (этапам) проекта, а вес дуги обозначает время выполнения соответствующей операции. Найти наименьшее время выполнения проектов, критические пути и резервы времени для выполнения каждой операции.

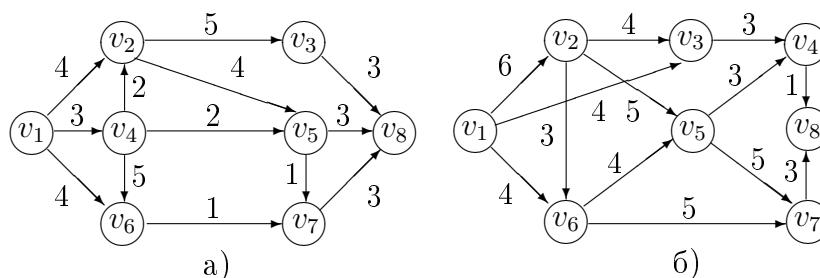


Рис. 2

73. Найти максимальные потоки и минимальные разрезы в транспортных сетях (см. рис. 3, а, б). Число рядом с дугой есть её пропускная способность.

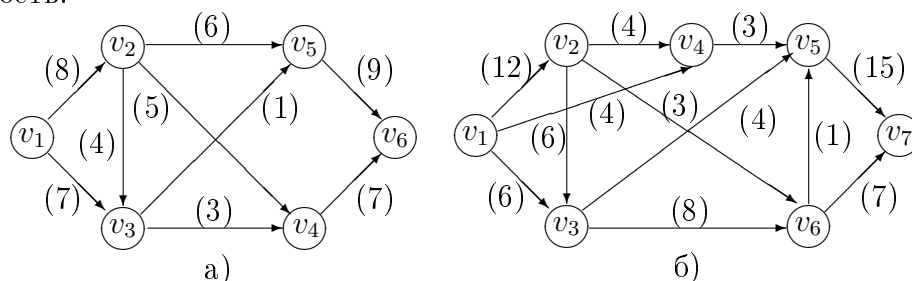


Рис. 3

74. Пусть имеется m неженатых мужчин, n незамужних женщин и k свах. У каждой свахи есть список своих клиентов; между любыми мужчиной и женщиной из этого списка сваха может устроить брак. Для i -й свахи число устроенных ею за год браков не превосходит числа b_i . Перевести задачу нахождения наибольшего числа браков, которые могут устроить свахи за год, в задачу нахождения максимального потока в некоторой сети.

Вопросы для самоконтроля

Комбинаторика

1. В чем состоит правило произведения?
2. Что такое упорядоченная выборка и неупорядоченная выборка? Что такое выборка с повторениями и выборка без повторений?
3. Выведите формулы для числа размещений из n по m без повторений и с повторениями.
4. Выведите формулу для числа сочетаний без повторений.
5. Выведите формулу для числа сочетаний с повторениями.
6. Каким числом способов можно разместить n одинаковых шаров по m различным урнам?
7. Выведите формулу для числа перестановок с повторениями.
8. Выведите полиномиальную формулу. Как ее частный случай получите формулу бинома Ньютона.
9. Как доказываются тождества для биномиальных коэффициентов с помощью их комбинаторной трактовки? Приведите примеры.
10. Что такое мощность конечного множества? Проиллюстрируйте формулу включения-исключения для случая двух и трех множеств.
11. Как доказывается формула включения-исключения с помощью подсчета вклада каждого элемента в правую и левую части формулы?
12. Что такое беспорядок? Примените формулу включения-исключения для подсчета числа беспорядков.

13. В чем состоит задача о беспорядках и встречах? Как свести вычисление количества перестановок с фиксированным числом встреч к вычислению числа беспорядков?
14. Что такое сюръекция? Как вывести формулу для числа сюръекций с помощью формулы включения-исключения?
15. Каким числом способов можно разместить n различных шаров по m различным ящикам так, чтобы ни один ящик не остался пустым?
16. В чем состоит обобщенная формула включения-исключения?
17. Каков общий вид линейного рекуррентного соотношения k -го порядка?
18. Как найти формулу n -го члена последовательности, заданной линейным рекуррентным соотношением?
19. Что такое числа Фибоначчи? Где они применяются?

Теория графов

1. Что такое простой граф, граф?
2. В чем состоит лемма о рукопожатиях?
3. Что такое изоморфные графы?
4. Что такое матрица смежности графа? Каковы ее свойства?
5. Что такое двудольный граф? Как его описать в терминах раскрасок вершин?
6. Определите операции над графами: объединение, соединение, дополнение.
7. Что такое маршрут, цепь, простая цепь? Как вводится отношение связности на множестве вершин? Что такое связный граф и компоненты связности графа?
8. Дайте определение моста в графе и укажите его свойства.

9. Укажите верхнюю и нижнюю границы для числа ребер простого графа с известным числом вершин и компонент связности. На каких графах они достигаются?
10. Как определяются метрические характеристики графа: расстояние между вершинами, эксцентриситет вершины, радиус и диаметр графа? Выведите двойное неравенство, включающее радиус и диаметр.
11. Дайте определения гамильтонова и полугамильтонова графа. В чем состоит задача коммивояжера?
12. Какие Вы знаете достаточные условия гамильтоновости графа?
13. Что такое эйлеров граф? В чем состоит легко проверяемый критерий эйлеровости?
14. Опишите алгоритм Флери построения эйлерова цикла.
15. Оцените долю эйлеровых графов среди простых помеченных графов с n вершинами. Как она меняется с ростом числа вершин?
16. Что такое лес, дерево?
17. Сколько ребер в дереве с n вершинами?
18. Укажите известные Вам свойства графа, равносильные тому, что этот граф — дерево.
19. Сколько имеется помеченных деревьев с n вершинами? Что такое код Прюфера?
20. Что такое стягивающее дерево?
21. Опишите известные Вам алгоритмы построения стягивающего дерева наименьшего веса, укажите оценки их трудоемкости.
22. В чем состоит алгоритм Дейкстры нахождения кратчайших путей в ориентированном графе?
23. Как найти расстояния между всеми парами вершин орграфа с помощью алгоритма Флойда?
24. Опишите постановку задачи сетевого планирования и управления. Что такое критический путь? Как найти наименьшее время выполнения проекта и резервы времени выполнения каждой операции?

25. Что такое транспортная сеть и поток в сети?
26. Опишите алгоритм Форда – Фалкерсона нахождения максимального потока в транспортной сети. Что такое минимальный разрез в сети и как его найти?

Материалы для контрольных работ

Задача 1

Найти коэффициент при x^k в разложении многочлена

- | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $(2x^3 + x^2 - 2x + 1)^6, k = 5;$ | 2) $(2x^3 + x^2 + x - 2)^5, k = 5;$ |
| 3) $(x^2 - 2x + 2)^8, k = 7;$ | 4) $(x^3 - x^2 - 2x - 1)^6, k = 7;$ |
| 5) $(x^2 + 2x - 2)^8, k = 7;$ | 6) $(x^3 - x^2 + 2x + 1)^6, k = 8;$ |
| 7) $(x^2 - x + 2)^8, k = 7;$ | 8) $(x^3 + x^2 - 2x + 1)^6, k = 8;$ |
| 9) $(x^2 + x - 2)^8, k = 7;$ | 10) $(x^3 - x^2 + 2x - 1)^6, k = 8;$ |
| 11) $(x^2 - 2x + 2)^7, k = 8;$ | 12) $(x^3 - x^2 - 2x - 1)^6, k = 8;$ |
| 13) $(x^2 + 2x - 2)^7, k = 8;$ | 14) $(x^3 - x^2 + 2x + 1)^5, k = 7;$ |
| 15) $(x^2 - x + 2)^7, k = 8;$ | 16) $(x^3 + x^2 - 2x + 1)^5, k = 7;$ |
| 17) $(x^2 + x - 2)^7, k = 8;$ | 18) $(x^3 - x^2 + 2x - 1)^5, k = 7;$ |
| 19) $(x^3 - x^2 + 2x + 1)^6, k = 7;$ | 20) $(x^3 - x^2 - 2x - 1)^5, k = 7;$ |
| 21) $(x^3 + x^2 - 2x + 1)^6, k = 7;$ | 22) $(x^3 + x^2 + x - 2)^5, k = 7;$ |
| 23) $(x^3 + x^2 - 2x + 1)^6, k = 6;$ | 24) $(x^3 + x^2 + x - 2)^5, k = 6;$ |
| 25) $(x^3 + x^2 - 2x + 2)^6, k = 6;$ | 26) $(x^3 + x^2 + x - 3)^5, k = 6;$ |
| 27) $(x^3 + x^2 - 2x + 3)^6, k = 5;$ | 28) $(x^3 + x^2 + x + 3)^5, k = 6;$ |
| 29) $(x^3 + 2x^2 - 2x + 1)^6, k = 6;$ | 30) $(x^3 + 2x^2 + x - 2)^5, k = 6;$ |
| 31) $(x^3 - x^2 + 2x - 1)^6, k = 5;$ | 32) $(x^3 - x^2 + x - 2)^5, k = 5.$ |

Задача 2

1. У англичан иногда детям дают несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если ему дают не более трёх имен из возможных 300 имен, а порядок имен существен?

2. Сколько имеется 7-значных чисел, в десятичной записи которых 1 встречается дважды, а 0 — трижды?

3. В шахматном кружке занимаются 2 девочки и 7 мальчиков. Для участия в соревновании необходимо составить команду из четырёх человек, в которую обязательно должна входить хотя бы одна девочка. Сколькими способами это можно сделать?

4. На прямой отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой — 11 точек. Сколько существует а) треугольников; б) четырёхугольников с вершинами в этих точках?

5. Сколькими способами можно составить комиссию из 3 человек, выбирая ее членов из 4 супружеских пар, но так, чтобы члены одной семьи не входили в комиссию одновременно?

6. В классе, в котором учатся Петя и Ваня, 31 человек. Сколькими способами можно выбрать из класса футбольную команду (11 человек) так, чтобы Петя и Ваня не входили в команду одновременно?

7. Найти число свободных от квадратов натуральных делителей числа $10!$.

8. Сколькими способами можно переставить буквы "эпиграф" так, чтобы и гласные, и согласные шли в алфавитном порядке?

9. Из 12 девушек и 10 юношей выбирают команду, состоящую из пяти человек. Сколькими способами можно выбрать эту команду так, чтобы в нее вошло не более трёх юношей?

10. а) Сколькими способами можно разбить 15 человек на три команды по 5 человек в каждой? б) Сколькими способами можно выбрать из 15 человек две команды по 5 человек в каждой?

11. Сколькими способами можно выстроить 9 человек разного роста в колонну по три человека, если в каждой шеренге люди выстраиваются по росту?

12. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 10 карт так, чтобы

а) среди них был ровно один туз?

б) среди них был хотя бы один туз?

13. Сколько существует 6-значных чисел, у которых по три чётных и нечётных цифры?

14. Сколько существует 10-значных чисел, сумма цифр которых равна а) 2; б) 3; в) 4?

15. Человек имеет 6 друзей и в течение 5 дней приглашает к себе в гости каких-то троих из них так, чтобы компания ни разу не повторялась. Сколькими способами он может это сделать?

16. Найти число всех натуральных делителей числа $10!$.

17. Докажите, что из n предметов чётное число предметов можно выбрать 2^{n-1} способами.

18. Поезду, в котором находится m пассажиров, предстоит сделать n остановок.

а) Сколькими способами могут выйти пассажиры на этих остановках?

б) Решите ту же задачу, если учитывается лишь количество пассажиров, вышедших на каждой остановке.

19. В кошельке лежит по 10 монет достоинством в 1, 2, 5 и 10 рублей. Сколькими способами можно из этих 40 монет выбрать 10? 11? 20?

20. Сколькими способами 3 человека могут разделить между собой 6 одинаковых яблок, один апельсин, одну сливу и один мандарин?

21. Каких 6-значных чисел больше: тех, в записи которых есть 6, или остальных?

22. Сколькими способами 4 черных шара, 4 белых шара и 4 синих шара можно разложить в 6 различных ящиков?

23. Найти число свободных от квадратов натуральных делителей числа 90 000.

24. Общество из n членов выбирает из своего состава одного представителя.

а) Сколькими способами может произойти открытое голосование, если каждый голосует за одного человека (быть может, и за себя)?

б) Решите ту же задачу, если голосование — тайное, т.е. учитывается лишь число голосов, поданных за каждого кандидата, и не учитывается, кто за кого голосовал персонально.

25. Сколькими способами можно выложить в ряд 5 красных, 5 синих и 5 зеленых шаров так, чтобы никакие два синих шара не лежали рядом?

26. Найти число всех натуральных делителей числа $13!$.

27. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды, содержащей 52 карты, 6 карт так, чтобы среди них были представители всех четырёх мастей?

28. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды, содержащей 52 карты, 6 карт так, чтобы среди них были представители только двух мастей?

29. Сколько имеется 7-значных чисел, в десятичной записи которых 1 встречается трижды, а 0 — дважды?

30. Найти число свободных от квадратов натуральных делителей числа $12!$.

31. Каких 7-значных чисел больше: тех, в записи которых есть 1, или остальных?

32. Сколькими способами можно выбрать из колоды в 52 карты 5 карт так, чтобы среди них было не более двух карт одной масти?

Задача 3

1. Сколькими способами можно переставить буквы слова "идемпотентность", чтобы две буквы "т" не шли подряд?

2. Сколькими способами можно переставить буквы слова "перешеек" так, чтобы четыре буквы "е" не шли подряд?

3. Сколькими способами можно переставить буквы слова "перестройка" так, чтобы буква "е" шла непосредственно за "п"?

4. Сколькими способами можно переставить буквы слова "дефолт", чтобы между двумя гласными буквами были две согласные?

5. Сколькими способами можно переставить буквы слова "университет" так, чтобы две буквы "т" не шли подряд?

6. Сколькими способами можно переставить буквы слова "каракули" так, чтобы никакие две гласные не стояли рядом?

7. Сколькими способами можно переставлять буквы слова "порошок" так, чтобы три буквы "о" не стояли рядом?

8. Сколькими способами можно переставить буквы слова "кофеварка" так, чтобы гласные и согласные буквы чередовались?

9. Сколькими способами можно переставить буквы слова "самовар" так, чтобы гласные и согласные буквы чередовались?

10. Сколькими способами можно переставить буквы в слове "каркас" так, чтобы одинаковые буквы не шли друг за другом?

11. Сколькими способами можно переставить буквы в слове "пурпур" так, чтобы одинаковые буквы не шли друг за другом?

12. Сколькими способами можно выбрать 4 буквы из слова "тартар", если не учитывать порядка выбранных букв? Сколько 4-значных чисел можно составить из цифр числа 112233?

13. Найти сумму 5-значных чисел, полученных при всевозможных перестановках цифр 1, 2, 2, 3, 4.

14. Найти сумму 5-значных чисел, полученных при всевозможных перестановках цифр 1, 1, 2, 2, 2.

15. Найти сумму 5-значных чисел, полученных при всевозможных перестановках цифр 1, 1, 2, 2, 3.

16. Сколько 6-значных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, ..., 9, если каждое число должно состоять из трёх чётных и трёх нечётных цифр, причем никакие две цифры в нем не повторяются?

17. Сколько 4-значных чисел можно составить из цифр числа 1122334?

18. Сколько 5-значных чисел можно составить из цифр числа 11122334?

19. Сколько 6-значных чисел можно составить из цифр числа 111223345?

20. Сколько 5-значных чисел можно составить из цифр числа 11122334 так, чтобы три цифры 1 не шли друг за другом?

21. Сколько различных 10-значных чисел можно написать, пользуясь тремя цифрами 1, 2, 3 при дополнительном условии, что цифра 3 применяется в каждом числе ровно два раза? Сколько написанных чисел делится на 9?

22. Сколькими способами можно переставить буквы слова "змеед" так, чтобы 3 буквы "е" не шли подряд?

23. Сколькими способами можно переставить буквы слова "институт", чтобы две буквы "т" не шли подряд?

24. Сколько имеется перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, в которых цифры 0, 1, 2, 3 стоят подряд (в произвольном порядке)?

25. Сколько 4-значных чисел, делящихся на 9, можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что в каждом числе каждая цифра встречается не более одного раза?

26. Сколькими способами можно переставить буквы слова "политкорректность", чтобы никакие две одинаковые буквы не стояли рядом?

27. Сколькими способами можно переставить буквы слова "индустриализация", чтобы две буквы "и" не шли подряд?

28. Сколькими способами можно переставить буквы слова "пастух", чтобы между двумя гласными буквами были две согласные?

29. Сколькими способами можно разложить 19 различных предметов по 5 ящикам так, чтобы в 4 ящика легло по 4 предмета, а в оставшийся — 3 предмета?

30. Сколькими способами можно разложить 19 различных предметов по 5 ящикам так, чтобы в 4 ящика легло по 3 предмета, а в оставшийся — 7 предметов?

31. Сколько существует 6-значных чисел, которые состоят из трёх различных чётных и трёх различных нечётных цифр?

32. Сколькими способами можно переставить буквы слова "обороноспособность", чтобы две буквы "о" не шли подряд?

Задача 4

1. В течение недели студент каждый день заходил в гости к какому-нибудь одному из четырёх своих друзей. Сколькими способами он мог это сделать, если известно, что он посетил всех четырёх?

2. Сколько существует чисел, не превосходящих 1000, которые
а) делятся одновременно на 6 и на 15;
б) делятся на 6 или на 15?

3. Сколько существует чисел, не превосходящих 1000, которые не делятся ни на 9, ни на 10, ни на 30?

4. Сколько существует чисел, не превосходящих 1000, которые не делятся ни на 5, ни на 7, ни на 11?

5. На каждой стороне треугольника ABC отмечено по 9 точек, делящих её на 10 равных частей. Рассмотрим всевозможные треугольники с вершинами в отмеченных точках (по одной на каждой стороне). Сколько среди этих треугольников таких, у которых ни одна из сторон не параллельна сторонам треугольника ABC ?

6. Во сколько натуральных чисел, не превосходящих 1000, входит цифра 9? Во сколько чисел она входит дважды?

7. Во сколько целых чисел от 0 до 1000 входит цифра 0? Во сколько чисел она входит дважды?

8. Во сколько целых чисел от 0 до 1000 входит цифра 8? Во сколько чисел она входит дважды?

9. Сколько существует 9-значных чисел, сумма цифр которых чётна?

10. Сколько чисел от 1 до 1000 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7?

11. "Ранним утром улыбающийся Игорь мчался босиком на рыбалку". Сколько различных осмысленных предложений можно составить, используя часть слов этого предложения, но не изменяя порядок их следования?

12. "Четыре усталых молчаливых путника долго пережидали внезапно разразившуюся грозу". Сколько различных осмысленных предложений можно составить, используя часть слов этого предложения, но не изменяя порядок их следования?

13. "Ранним утром улыбающийся Игорь мчался босиком на рыбалку". Из этого предложения будем вычеркивать одно за другим слова так, чтобы всякий раз получалось осмысленное предложение. Каким числом способов можно прийти к предложению, из которого уже нельзя вычеркнуть ни одного слова?

14. "Четыре усталых молчаливых путника долго пережидали внезапно разразившуюся грозу". Из этого предложения будем вычеркивать одно за другим слова так, чтобы всякий раз получалось осмысленное предложение. Каким числом способов можно прийти к предложению, из которого уже нельзя вычеркнуть ни одного слова?

15. Сколько среди километровых столбов $0|999, 1|998, 2|997, \dots, 999|0$ таких, что на них лишь две различные цифры?

16. Сколькими способами можно представить число 10^6 в виде произведения трёх натуральных множителей, если разложения, отличающиеся порядком множителей, считаются различными?

17. Сколькими способами можно построить в одну шеренгу 22 игрока двух футбольных команд так, чтобы при этом два футболиста одной команды не стояли рядом?

18. На каждой стороне треугольника ABC отмечено по 7 точек, разбивающих её на 8 равных частей. Рассмотрим всевозможные треугольники с вершинами в отмеченных точках (по одной на каждой стороне). Сколько среди этих треугольников таких, у которых ни одна из сторон не параллельна сторонам треугольника ABC ?

19. Лифт, в котором находится 9 пассажиров, может останавливаться на 10 этажах. Пассажиры выходят группами в 2, 3 и 4 человека. Сколькими способами это может произойти?

20. Сколько существует 8-значных чисел, сумма цифр которых нечётна?

21. Сколько есть 5-значных чисел, в десятичной записи которых есть одинаковые цифры?

22. Сколько есть чётных 5-значных чисел, в десятичной записи которых нет одинаковых цифр?

23. Сколько целых чисел от 0 до 1 000 000 содержат каждую из цифр 1, 2, 3? Сколько чисел состоит только из этих цифр?

24. Сколькими способами можно посадить за круглым столом 7 мужчин и 7 женщин так, чтобы никакие две женщины не сидели рядом?

25. Сколько существует 7-значных чисел, сумма цифр которых чётна?

26. Сколько есть нечётных 5-значных чисел, в десятичной записи которых нет одинаковых цифр?

27. Сколько трёхзначных чисел не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7?

28. Сколько чисел от 1 до 10000 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7?

29. Сколько 4-значных чисел не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7?

30. Сколькими способами можно представить число 10^5 в виде произведения трёх натуральных множителей, если разложения, отличающиеся порядком множителей, считаются различными?

31. Сколькими способами из 19 предметов можно выбрать нечётное число предметов?

32. Сколькими способами из 20 предметов можно выбрать нечётное число предметов?

Задача 5

В графе (см. рис. 1а для вариантов 1–16 и рис. 1б для вариантов 17–32)

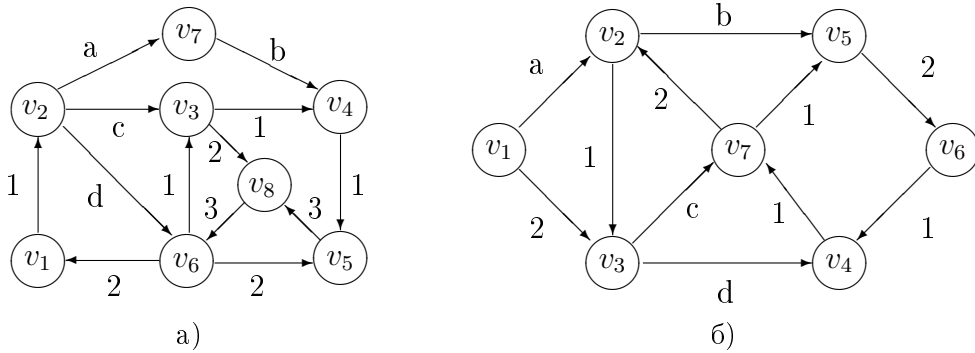


Рис. 1

с помощью алгоритма Прима найти стягивающее дерево минимального веса (в таблице указаны веса некоторых дуг).

вариант	a	b	c	d
1	1	2	1	2
2	1	4	7	2
3	1	6	1	7
4	2	5	1	2
5	2	3	1	2
6	4	5	8	9
7	6	7	1	8
8	5	7	1	2
9	1	2	8	2
10	1	4	8	2
11	1	6	1	8
12	2	5	1	2
13	2	3	1	9
14	4	5	9	2
15	6	7	8	9
16	5	7	8	9

вариант	a	b	c	d
17	4	2	2	1
18	1	4	6	4
19	1	6	9	7
20	2	5	9	7
21	2	3	9	4
22	4	5	9	4
23	6	7	9	1
24	5	7	9	1
25	1	2	7	9
26	1	4	7	9
27	1	6	7	4
28	2	5	7	4
29	2	3	7	1
30	4	5	7	1
31	6	7	4	9
32	5	7	4	9

Задача 6

В графе (см. рис. 2а для вариантов 1–16 и рис. 2б для вариантов 17–32)

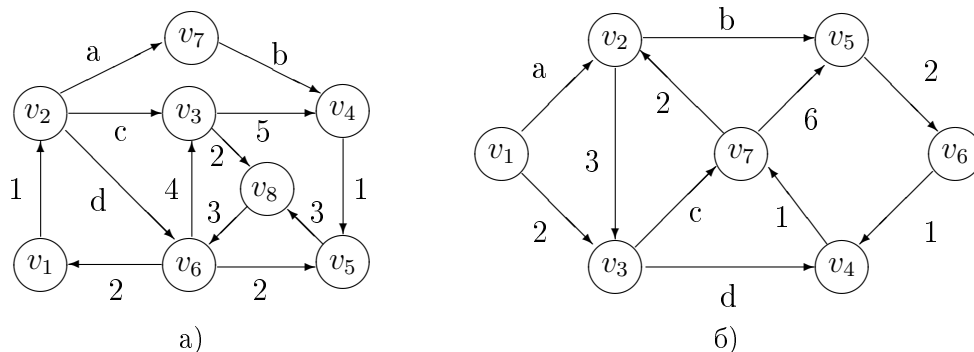


Рис. 2

с помощью алгоритма Дейкстры найти кратчайший путь от i -й вершины до всех остальных (в таблице указаны номер i и веса некоторых дуг).

вариант	i	a	b	c	d
1	1	1	2	3	4
2	2	7	2	3	4
3	3	1	7	3	4
4	6	1	2	7	4
5	8	1	2	3	7
6	1	8	9	3	4
7	2	1	8	9	4
8	3	1	2	8	9
9	6	8	2	9	4
10	8	8	2	3	9
11	1	1	8	3	9
12	2	1	2	8	9
13	3	1	9	7	8
14	6	9	2	9	8
15	8	8	9	3	8
16	1	8	9	9	2

вариант	i	a	b	c	d
17	2	4	2	2	1
18	3	6	4	2	1
19	6	9	7	4	1
20	1	9	7	1	4
21	1	9	4	7	1
22	2	9	4	1	7
23	3	9	1	4	7
24	6	9	1	7	4
25	1	7	9	1	4
26	1	7	9	4	1
27	2	7	4	1	9
28	3	7	4	9	1
29	6	7	1	9	4
30	1	7	1	4	9
31	1	4	9	7	1
32	2	4	9	1	7

Задача 7

Пусть проект описывается взвешенным графом (см. рис. 3а для вариантов 1–16 и рис. 3б для вариантов 17–32), где дуги соответствуют операциям (этапам) проекта, а вес дуги обозначает время выполнения соответствующей операции.

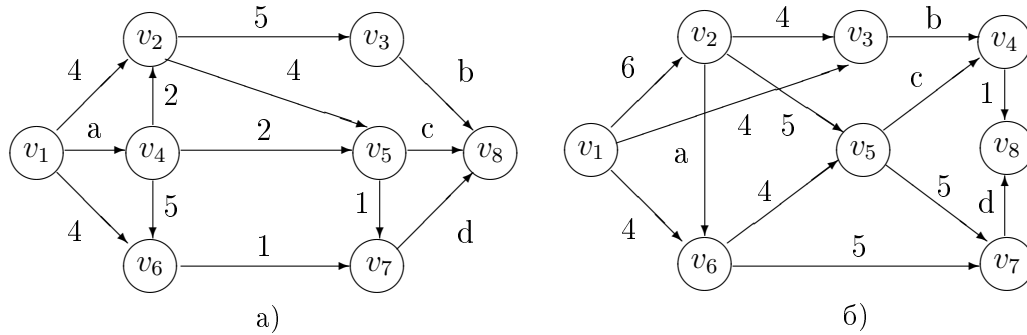


Рис. 3

Найти наименьшее время выполнения проекта, критические пути и резерв времени для выполнения операции $v_i \rightarrow v_j$ (в таблице указаны номера i и j и веса некоторых дуг).

вариант	i	j	a	b	c	d
1	1	2	4	2	2	1
2	1	4	6	4	2	1
3	1	6	9	7	4	1
4	2	5	9	7	1	4
5	2	3	9	4	7	1
6	4	5	9	4	1	7
7	6	7	9	1	4	7
8	5	7	9	1	7	4
9	1	2	7	9	1	4
10	1	4	7	9	4	1
11	1	6	7	4	1	9
12	2	5	7	4	9	1
13	2	3	7	1	9	4
14	4	5	7	1	4	9
15	6	7	4	9	7	1
16	5	7	4	9	1	7

вариант	i	j	a	b	c	d
17	1	2	1	2	3	4
18	1	6	7	2	3	4
19	1	3	1	7	3	4
20	2	5	1	2	7	4
21	2	3	1	2	3	7
22	5	4	8	9	3	4
23	6	7	1	8	9	4
24	5	7	1	2	8	9
25	1	2	8	2	9	4
26	1	6	8	2	3	9
27	1	3	1	8	3	9
28	2	5	1	2	8	9
29	2	3	1	9	7	8
30	5	4	9	2	9	8
31	6	7	8	9	3	8
32	5	7	8	9	9	2

Задача 8

Найти максимальный поток и минимальный разрез в транспортной сети (см. рис. 4а для вариантов 1–16 и рис. 4б для вариантов 17–32). Число рядом с дугой есть её пропускная способность.

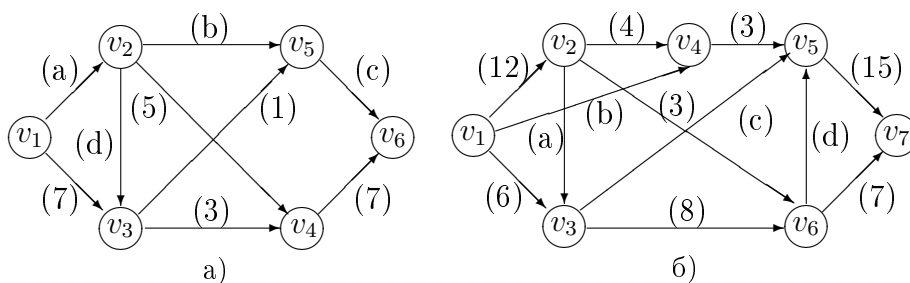


Рис. 4

В таблице указаны пропускные способности некоторых дуг.

вариант	a	b	c	d
1	4	2	2	1
2	1	4	6	4
3	1	6	9	7
4	2	5	9	7
5	2	3	9	4
6	4	5	9	4
7	6	7	9	1
8	5	7	9	1
9	1	2	7	9
10	1	4	7	9
11	1	6	7	4
12	2	5	7	4
13	2	3	7	1
14	4	5	7	1
15	6	7	4	9
16	5	7	4	9

вариант	a	b	c	d
17	1	2	1	2
18	1	4	7	2
19	1	6	1	7
20	2	5	1	2
21	2	3	1	2
22	4	5	8	9
23	6	7	1	8
24	5	7	1	2
25	1	2	8	2
26	1	4	8	2
27	1	6	1	8
28	2	5	1	2
29	2	3	1	9
30	4	5	9	2
31	6	7	8	9
32	5	7	8	9

Библиографический список

- [1] Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В. *Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы*. — Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. — 288 с.
- [2] Басакер Р., Саати Т. *Теория графов и сетей*. — М.: Наука, 1974. — 366 с.
- [3] Башмаков М.И., Беккер Б.М., Гольховой В.М. *Задачи по математике. Алгебра и анализ*. — М.: Наука, 1982. — 192 с.
- [4] Белоусов А.И., Ткачёв С.Б. *Дискретная математика*. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. — 744 с.
- [5] Вентцель Е.С. *Исследование операций. Задачи, принципы, методология*. — М.: Высш. шк., 2001. — 208 с.
- [6] Воробьев Н.Н. *Числа Фибоначчи*. — М.: Наука, 1992. — 190 с.
- [7] Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. *Задачи и упражнения по курсу дискретной математики*. — М.: Наука, 1992. — 405 с.
- [8] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. *Конкретная математика*. — М.: Мир, 1998. — 703 с.
- [9] Гэри М., Джонсон Д. *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*. — М.: Мир, 1982. — 416 с.
- [10] *Исследование операций в экономике*/ Под ред. Н.Ш. Кремера. — М.: ЮНИТИ, 2001. — 407 с.
- [11] *Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения*/ Под ред. К.А. Рыбникова. — М.: Наука, 1982. — 365 с.
- [12] Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. *Дискретное программирование*. — М.: Наука, 1972. — 368 с.

- [13] Кофман А. *Введение в прикладную комбинаторику*. — М.: Наука, 1975. — 480 с.
- [14] Кристофидес Н. *Теория графов. Алгоритмический подход*. — М.: Мир, 1978. — 432 с.
- [15] Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. *Дискретная математика для инженеров*. — М.: Энергоатомиздат, 1988.
- [16] Кук Д., Бейз Г. *Компьютерная математика*. — М.: Наука, 1990.
- [17] *Лекции по теории графов*/ В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов и др. — М.: Наука, 1990. — 384 с.
- [18] Липский В. *Комбинаторика для программистов*. — М.: Мир, 1988. — 213 с.
- [19] Ловас Л., Пламмер М. *Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии*. — М.: Мир, 1998. — 653 с.
- [20] Майника Э. *Алгоритмы оптимизации на сетях и графах*. — М.: Мир, 1981. — 323 с.
- [21] Москинова Г.И. *Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях*. — М.: Логос, 2002. — 240 с.
- [22] Нефедов В.Н., Осипова В.А. *Курс дискретной математики*. — М.: Изд-во МАИ, 1992. — 264 с.
- [23] Новиков Ф.А. *Дискретная математика для программистов*. — СПб.: Питер, 2000. — 304 с.
- [24] Оре О. *Теория графов*. — М.: Наука, 1980. — 392 с.
- [25] Пападимитриу Х., Стайглиц К. *Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность*. — М.: Мир, 1985. — 512 с.
- [26] Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. *Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика*. — М.: Мир, 1980. — 478 с.
- [27] Уилсон Р. *Введение в теорию графов*. — М.: Мир, 1977. — 208 с.
- [28] Холл М. *Комбинаторика*. — М.: Мир, 1970. — 424 с.

- [29] *Школа в "Кванте": Арифметика и алгебра*/ Под ред. А.А. Егорова. — М.: Бюро Квантум, 1994 (Прил. к журналу "Квант"). — 128 с.
- [30] Эвнин А.Ю. *Варианты индивидуальных заданий по дискретной математике*. — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2002. — 22 с.
- [31] Эвнин А.Ю. *Вокруг теоремы Холла*. — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2004. — 71 с.
- [32] Эвнин А.Ю. *Две заметки по комбинаторике*// Математическое образование. — 2000. — №3(14). — С.27–34.
- [33] Эвнин А.Ю. *Дискретная математика: Конспект лекций*. — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 1998. — 176 с.
- [34] Эвнин А.Ю. *Задачник по дискретной математике*. — 2-е изд., перераб. и доп. — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2002. — 164 с.
- [35] Эвнин А.Ю. *Решение задач на возвратные последовательности*// Математика в школе. — 2001. — №7. — С.69–70.

Ресурсы Интернета

1. Электронная версия учебника по теории графов (Р.Дистель. Теория графов. Shpringer, Graduate texts in Mathematics, v.173, 2000)
<http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graph.theory/GraphTheoryII.pdf>
2. Электронный журнал по комбинаторике
<http://www.combinatorics.org/>
3. Пакет программ Combinatorica, предназначенный для обучения и исследований по комбинаторике
<http://www.combinatorica.com/>
4. Электронный учебник по дискретной математике (Петухин В.А., Иркутский государственный университет, 1999)
<http://www.isu.ru/~slava/do/disc/curshome.htm>
5. Алгоритмы решения некоторых теоретико-графовых задач (Краткое изложение лекций В.Б. Алексеева в МГУ)
<http://www.ergeal.ru/archive/cs/discra/>
6. Пономарев В.Ф. Дискретная математика для информатиков-экономистов. (Калининградский государственный технический университет, 2002)
http://www.klgtu.ru/elib/ponom000/dm_inf.exe
7. Материалы курса МА311 Дискретная математика, читаемого в Лондонской школе экономики
www.maths.lse.ac.uk/Courses/ma311.html
8. Список ресурсов Интернета по дискретной математике
<http://mathworld.wolfram.com/topics/DiscreteMathematics.html>
9. Список ресурсов Интернета по теории графов
<http://mathworld.wolfram.com/topics/GraphTheory.html>

10. Математический атлас. Теория графов
<http://www.math.niu.edu/~rusin/known-math/index/05CXX.html>
11. Математический атлас. Комбинаторика
<http://www.math.niu.edu/~rusin/known-math/index/05-XX.html>
12. Материалы курса дискретной математики на экономическом факультете МГУ (автор Черняк В.И.)
<http://crow.academy.ru/dm/>

Предметный указатель

- Алгоритм Дейкстры 64
- Алгоритм Краскала 58
- Алгоритм Прима 59
- Алгоритм Флёри 51
- Алгоритм Флойда 67
- Алгоритм Форда – Фалкерсона 72
- Бином Ньютона 20
- Граф 36
- Граф Петерсена 40
- Двудольный граф 41
- Диаметр графа 46
- Дизъюнктное объединение графов 41
- Задача коммивояжёра 48
- Задача о кенигсбергских мостах 51
- Задача о рассеянной секретарше 27
- Задача Эйлера о коне 48
- Звёздный граф 41
- Изоморфизм графов 38, 62
- Источник 62
- Код Прюфера 56
- Кратные рёбра 37
- Кубический граф 40
- Лемма о рукопожатиях 38
- Маршрут в графе 42
- Матрица смежности графа 39
- Минимальный разрез в сети 75
- Мост 43
- Мультимножество 37
- Объединение графов 41
- Орграф 62
- Петля 37
- Платоновы графы 41
- Подграф графа 38
- Полный граф 40
- Полный двудольный граф 41
- Полустепень исхода 62
- Полустепень захода 62
- Порядок графа 39
- Простой граф 36
- Путь в орграфе 63
- Радиус графа 46
- Разрез 43
- Резерв времени 70
- Рёберный граф 40
- Степень вершины графа 38
- Сток 62
- Центр графа 46
- Цепь 43
- Эксцентриситет вершины 46