

**А.Л. Сушков, В.Г. Поспехов, Т.С. Ровенская**

**Теоретические основы  
проектирования оптических систем  
с неоднородным показателем преломления**

*Учебное пособие*



Москва  
ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МГТУ им. Н. Э. Баумана  
**2 0 1 7**

УДК 535.8(075.8)

ББК 22.34

С91

Издание доступно в электронном виде на портале *ebooks.bmstu.ru*  
по адресу: <http://ebooks.bmstu.ru/catalog/112/book1558.html>

Факультет «Радиоэлектроника и лазерная техника»  
Кафедра «Лазерные и оптико-электронные системы»

*Рекомендовано*

*Редакционно-издательским советом МГТУ им. Н.Э. Баумана  
в качестве учебного пособия*

**Сушков, А. Л.**

**С91** Теоретические основы проектирования оптических систем с неоднородным показателем преломления : учебное пособие / А. Л. Сушков, В. Г. Поспехов, Т. С. Ровенская. — Москва : Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. — 143, [1] с.: ил.

ISBN 978-5-7038-4558-5

Рассмотрены вопросы проектирования оптических систем с неоднородными оптическими элементами. Дан обзор методов расчета реальных и параксиальных лучей в неоднородных средах осевой симметрии, приведены технологические и оптические характеристики элементов с технологически достижимыми типами распределения показателя преломления. Представлены теория первичных хроматических и монохроматических aberrаций, свойства градиентов в области Гаусса и aberrаций 3-го порядка. Сделан акцент на прикладные вопросы проектирования одиночных линз и блоков из двух линз с улучшенными aberrационными характеристиками, одиночных линз с варьируемой кривизной изображения Петцваля. Дано обоснование расчета объектива Триплет с радиально-неоднородной линзой. В приложении приведены схемы расчета коэффициентов aberrаций 3-го порядка в среде MathCAD аналитическим и численным методами для различных типов неоднородностей показателя преломления.

Для студентов старших курсов, обучающихся по дисциплинам «Градиентная оптика» и «Проектирование оптических систем с неоднородными элементами». Может быть полезно специалистам оптической отрасли промышленности.

УДК 535.8(075.8)

ББК 22.34

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

© Оформление. Издательство

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

ISBN 978-5-7038-4558-5

## Предисловие

Градиентная оптика является сравнительно новым разделом оптики, сформировавшимся около 50 лет назад. Широкое применение оптических неоднородных элементов обусловлено развитием волоконно-оптических линий связи (ВОЛС), созданием тонких эндоскопических приборов. Благодаря современной вычислительной технике и соответствующим компьютерным программам стало доступным выполнение габаритного расчета и оценки качества изображения градиентной оптической среды (ГрОС). Вместе с тем необходима основанная на теории aberrаций предварительная оценка качества системы, дающая логическое обоснование полученного aberrационного решения. В отечественной учебной литературе пока нет достаточно полного пособия по теории aberrаций и методам проектирования градиентных оптических элементов (ГрОЭ) и ГрОС, что в определенной мере компенсируется настоящим пособием, которое включает материалы лекций, читаемых в МГТУ им. Н. Э. Баумана по направлению «Опtotехника».

Цель данного издания — методическая проработка основных теоретических положений градиентной оптики в направлении решения прикладных задач.

Изучение пособия позволит студентам: расширить знания в области свойств новых оптических материалов с нетрадиционными свойствами; получить навыки в расчетах параксиальных характеристик основных типов градиентных элементов; овладеть методикой расчета aberrации 3-го порядка простейших оптических элементов (градианов, линз с осевым, радиальным и сфероконцентрическим типами неоднородности показателя преломления (ПП)); доказать необходимость применения градиентных элементов в оптических схемах приборов; спроектировать ОС с ранее недостижимыми оптическими и массогабаритными характеристиками.

Учебное пособие предназначено для студентов старших курсов, обучающихся по оптическим специальностям. Изложенная теоретическая база может стать полезной инженерам-разработчикам и инженерам-исследователям.

## Введение

Первой освоила коммерческое производство ГрОЭ японо-американская фирма Nippon Sheet Glass, сейчас она называется GO!FOTON. В настоящее время многие американские, японские и немецкие фирмы выпускают ГрОЭ типа *selfoc*, а также радиально- и аксиально-градиентные линзы. В России подобными работами занимается фирма «Гринекст» (Санкт-Петербург).

Теоретические разработки методов проектирования оптических систем (ОС) с градиентными элементами проводили для следующих схем приборов: объектива монокуляра; FLIR-системы; объектива микроскопа. В ряде отечественных публикаций освещена теория проектирования жестких эндоскопов, позволяющая предварительно рассчитывать, а также давать ориентир для проведения технологических исследований по созданию необходимых типов ГрОЭ. Совершенствование ОС в направлении уменьшения габаритных размеров, снижения массы, повышения качества изображения в сочетании с ранее недостижимыми оптическими характеристиками обусловило развитие концепции использования в качестве дополнительной степени свободы регулярной неоднородности ПП в элементах системы для повышения ее оптических характеристик.

Однако проектирование ГрОС представляет некоторые трудности, связанные с недостаточными знаниями об аберрационных и технологических свойствах градиентных элементов. Существующая информация разбросана по книгам разного назначения (в основном зарубежным), журнальным статьям, интернет-сайтам, поэтому необходимы осмысление и методическая проработка этой информации для ее использования на практике с применением сложившихся в отечественной оптической школе понятий.

Излагаемые методы проектирования ГрОС ориентированы на широкий класс систем: с круговой симметрией образующих оптические элементы поверхностей и с осесимметричными законами распределения показателя преломления (РПП) градиентных оптических сред  $n(x, y, z)$  или  $n^2(x, y, z)$ . Принято считать, что ось симметрии в РПП

градиентной среды совпадает с оптической осью системы, а показатель преломления не связан с направлением распространения света.

Каждую поверхность раздела сред можно представить уравнением относительно координат точки, лежащей на этой поверхности. Как правило, оптическую поверхность описывают в декартовой системе координат с началом в вершине поверхности при условии, что плоскость  $XOY$  — касательная к поверхности, а ось  $OZ$  направлена слева направо (система координат Федера).

### Список основных сокращений

АП	— асферическая поверхность
ГрОС	— градиентная оптическая система
ГрОСр	— градиентная оптическая среда
ГрОЭ	— градиентный оптический элемент
КР	— константа распределения при РРПП
ОРПП	— осевое распределение показателя преломления
ОС	— оптическая система
ОСр	— оптическая среда
ПП	— показатель преломления
РПП	— распределение показателя преломления
РРПП	— радиальное распределение показателя преломления
СРПП	— сфероцентрическое распределение показателя преломления

# **1. МЕТОДЫ РАСЧЕТА РЕАЛЬНЫХ ЛУЧЕЙ В ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ ГРАДИЕНТНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ**

Проектирование ГрОС базируется на методах геометрической (лучевой) оптики, в основе которых лежат расчеты параметров траекторий параксиальных и реальных лучей. Эти методы подразделяют на два — методы габаритного и абберационного расчетов. Последние опираются на итоговые положения теории хроматизма и аббераций 3- и 5-го порядков. По результатам расчета траекторий реальных лучей находят значения реальных аббераций ОС и проводят оценку качества изображения.

## **1.1. Лучевое уравнение и обзор методов его решения**

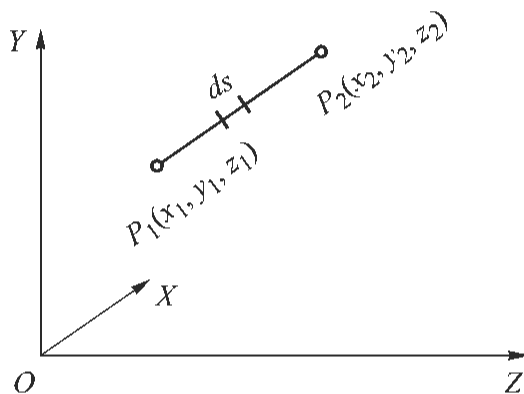
Для расчета ГрОС требуются значительные затраты времени и усилий разработчика. Чтобы получить сбалансированную по абберациям ОС, используют аналитические методы проектирования, основанные на уравнениях аббераций 3-го порядка и хроматических аббераций 1-го порядка. Аналитические методы предполагают расчет траектории двух параксиальных лучей, что позволяет проанализировать вклад отдельных поверхностей и оптических сред в каждый тип аббераций.

По результатам расчета первичных аббераций ГрОС получают информацию для решения задачи синтеза и анализа ОС, а также обоснования направлений технологических исследований, связанных с изготовлением новых типов градиентных оптических сред (ГрОСр) и элементов. Также в процессе проектирования необходимо учитывать значения технологически достижимых параметров ГрОСр и ГрОЭ. К таким параметрам относятся: глубина градиентной среды; закон изменения и максимальное изменение (перепад) ПП; угловой коэффициент наклона для осевого РПП; чувствительность функ-

ции РПП к углу между осью симметрии ГрОСр и оптической осью ГрОЭ.

Одной из особенностей проектирования градиентных ОС по сравнению с системами из однородных оптических элементов является включение в методику этапа «Пересчета параметров ОС» после перехода от теоретической (расчетной) функции РПП к реально существующей.

Векторное дифференциальное уравнение, описывающее траекторию луча в неоднородной среде в системе прямоугольных координат  $OXYZ$ , известно как *лучевое уравнение*. На рис. 1.1 показана траектория луча между точками  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $P_2(x_2, y_2, z_2)$ . Представим общую длину пути луча в неоднородной среде как сумму элементарных отрезков  $ds$ , на каждом из которых значение ПП постоянно.



**Рис. 1.1.** Траектория луча в среде с изменяющимся показателем преломления  $n = n(x, y, z)$

Согласно принципу Ферма луч между двумя точками идет по такому пути, на прохождение которого требуется наименьшее время, т. е. по самому быстрому:

$$\int_{P_1 P_2} n ds = \min, \quad (1.1)$$

где  $n = n(x, y, z)$ .

Для элемента пути  $ds$  имеем

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2,$$

$$ds = \sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 1)} dz,$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dz}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dz}.$$

Обозначим  $L = n\sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ , тогда для выполнения (1.1) должно соблюдаться условие Эйлера—Лагранжа:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) &= \frac{\partial L}{\partial x}; \\ \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) &= \frac{\partial L}{\partial y},\end{aligned}\tag{1.2}$$

где  $\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial s}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 1}$ ,  $\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial s}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 1}$ .

Найдем производные  $\frac{\partial L}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$  и подставим их в (1.2):

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \frac{n\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 1}}; \quad \frac{\partial L}{\partial x} = \dot{n}_x \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 1} = \dot{n}_x \frac{ds}{dz}; \\ \frac{d}{dz}\left(\frac{n\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 1}}{\partial s\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 1}}\right) &= \dot{n}_x \frac{ds}{dz},\end{aligned}$$

где  $\dot{n}_x$  — производная.

Аналогичные преобразования для  $L$  проводим и по координатам  $y$ ,  $z$ . В результате получаем систему дифференциальных уравнений луча по параметру  $ds$ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left(n\frac{\partial x}{\partial s}\right) &= \dot{n}_x; \\ \frac{d}{ds}\left(n\frac{\partial y}{\partial s}\right) &= \dot{n}_y; \\ \frac{d}{ds}\left(n\frac{\partial z}{\partial s}\right) &= \dot{n}_z,\end{aligned}\tag{1.3}$$

где  $\dot{n}_y$ ,  $\dot{n}_z$  — производные.

Представим (1.3) в векторной форме

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\bar{R}}{ds}\right) = \nabla n,\tag{1.4}$$

где  $\bar{R}$  — радиус-вектор, определяющий положение точки на траектории луча в неоднородной оптической среде  $n(\bar{R})$ .

Лучевое уравнение (1.4) можно записать как



$$\frac{d}{ds}(n\bar{T}(\bar{R})) = \text{grad } n,$$

где

$$\bar{T}(\bar{R}) = \frac{d\bar{R}}{ds}$$

или в матричной форме

$$\text{grad } n(\bar{R}) = \nabla n = \begin{bmatrix} dn/dx \\ dn/dy \\ dn/dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{n}_x \\ \dot{n}_y \\ \dot{n}_z \end{bmatrix}.$$

Выражение (1.3) обычно представляют в виде системы дифференциальных уравнений 2-го порядка, полученной с помощью дифференцирования по координате  $z$  и соответствующих преобразований:

$$\begin{aligned} n\ddot{x} + (1 + \dot{y}^2 + \dot{x}^2) \left[ \frac{\partial n}{\partial z} \dot{x} - \frac{\partial n}{\partial x} \right] &= 0; \\ n\ddot{y} + (1 + \dot{y}^2 + \dot{x}^2) \left[ \frac{\partial n}{\partial z} \dot{y} - \frac{\partial n}{\partial y} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Для системы (1.5) вводим понятие оптического направляющего косинуса луча с осями  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ :

$$\begin{aligned} n \frac{dx}{ds} &= n \cos \alpha = p; \\ n \frac{dy}{ds} &= n \cos \beta = q; \\ n \frac{dz}{ds} &= n \cos \gamma = l, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — углы между касательной к лучу в точке  $P_j$  и осями координат  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  соответственно;  $p$ ,  $q$ ,  $l$  — оптические направляющие косинусы.

Запишем уравнения (1.3) с учетом (1.6):

$$\begin{aligned} \frac{dp}{ds} &= \frac{\partial n}{\partial x}; \\ \frac{dq}{ds} &= \frac{\partial n}{\partial y}; \\ \frac{dl}{ds} &= \frac{\partial n}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

**Стандартный метод решения лучевого уравнения.** По уравнениям (1.7) можно определить траекторию луча в неоднородной среде в параметрической форме  $\bar{R} = \bar{R}(s)$ , которая не является наилучшей для вычислений. Использование координаты  $z$  в качестве независимой переменной обеспечивает снижение размерности уравнений (1.3) и их взаимозависимости. Полученная форма лучевого уравнения, называемая гамильтоновой, пригодна к прямому численному интегрированию стандартным методом:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dz} &= \frac{p}{\sqrt{n^2 - p^2 - q^2}}; & \frac{dy}{dz} &= \frac{q}{\sqrt{n^2 - p^2 - q^2}}; \\ \left. \begin{aligned} \frac{dp}{dz} &= \frac{n \frac{\partial n}{\partial x}}{\sqrt{n^2 - p^2 - q^2}} = \frac{nn_x}{\sqrt{n^2 - p^2 - q^2}}; \\ \frac{dq}{dz} &= \frac{n \frac{\partial n}{\partial y}}{\sqrt{n^2 - p^2 - q^2}} = \frac{nn_y}{\sqrt{n^2 - p^2 - q^2}}; \end{aligned} \right\} & (1.8) \\ ds &= \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2} dz. \end{aligned}$$

При вычислении траектории луча с помощью (1.8) используют проверочные соотношения

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 + l^2 &= n^2; \\ xq - yp &= x_0 q_0 - y_0 p_0 = C, \end{aligned}$$

где  $C$  — постоянная, называемая косым инвариантом; индекс «0» обозначает параметры в начале градиентной среды, где  $z = 0$ .

**Метод разложения в ряд Тейлора.** Траекторию луча разбивают на элементарные отрезки  $\Delta s$  в окрестности точки  $s$  и последовательно находят точки траектории и касательные к ней. Решение уравнения (1.4) и его производную представляют в виде ряда Тейлора:

$$\bar{R}(s + \Delta s) = \bar{R}(s) + \frac{d\bar{R}}{ds}(s) \Delta s + \frac{1}{2} \frac{d^2 \bar{R}}{ds^2}(s) \Delta s^2 + \dots; \quad (1.9)$$

$$\frac{d\bar{R}}{ds}(s + \Delta s) = \frac{d\bar{R}}{ds}(s) + \frac{d^2 \bar{R}}{ds^2}(s) \Delta s + \dots, \quad (1.10)$$

где  $\frac{d\vec{R}}{ds} = \vec{T}$  — единичный вектор, касательный к траектории (оптический лучевой вектор);  $\frac{d^2\vec{R}}{ds^2} = \vec{K}$  — вектор кривизны траектории.

Поскольку  $\vec{T} \cdot \vec{K} = 0$ , то с учетом (1.4) получаем

$$\vec{K} = \frac{\left[ \nabla n - \vec{T} (\nabla n \vec{T}) \right]}{n}.$$

Таким образом, по координатам и углу наклона луча в точке траектории  $s$  и при последовательном использовании выражений (1.9), (1.10) находят значения этих величин в точке  $s + \Delta s$ . При этом в (1.10) можно вычислить только члены до 2-го порядка малости и невозможно перейти к более высоким степеням приближения для повышения скорости сходимости метода.

**Метод Шарма.** В настоящее время этот метод является общепризнанным для решения лучевого уравнения (1.4), которое преобразуют путем введения параметра  $dt$ :

$$dt = \frac{ds}{n}, \quad (1.11)$$

тогда (1.4) с учетом (1.11) принимает вид

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = n \nabla n, \quad (1.12)$$

или

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \frac{1}{2} \nabla n^2.$$

Оптический вектор  $\vec{M}(\vec{R})$  определяют по уравнению

$$\vec{M}(\vec{R}) = \vec{i} n \frac{dx}{ds} + \vec{j} n \frac{dy}{ds} + \vec{k} n \frac{dz}{ds}, \quad (1.13)$$

или

$$\vec{M}(\vec{R}) = n \begin{pmatrix} dx/ds \\ dy/ds \\ dz/ds \end{pmatrix},$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — единичные направляющие векторы.

Введем обозначение

$$\frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} = \bar{D}(\bar{R}), \quad (1.14)$$

где

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \bar{D}(\bar{R}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial n^2 / \partial x \\ \partial n^2 / \partial y \\ \partial n^2 / \partial z \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} \partial n / \partial x \\ \partial n / \partial y \\ \partial n / \partial z \end{pmatrix}.$$

С учетом (1.13) получают  $\frac{d\bar{M}}{dt} = n \nabla n$ .

Векторные функции  $\bar{M}(\bar{R})$  и  $\bar{T}(\bar{R})$  связаны соотношением

$$\bar{M}(\bar{R}) = \bar{T}(\bar{R}) n(\bar{R}) = n \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ l \end{pmatrix}.$$

Начальные условия для точки  $P(\bar{R}_0)$  входа луча в градиентную среду:

$$\begin{aligned} \bar{R}_0 = \bar{R}_{t=0} &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}; \\ \left. \frac{d\bar{R}}{dt} \right|_{t=0} &= \bar{T}|_{t=0} n(\bar{R}_0) = M_0 = \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ l_0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Уравнение (1.12) при начальных условиях (1.15) можно решить численными методами, например Рунге—Кутты, с помощью рекуррентных соотношений:

$$\bar{R}_{j+1} = \bar{R}_j + \Delta t \left[ \bar{M}_j + \frac{1}{6} (\bar{A} + 2\bar{B}) \right];$$

$$\bar{M}_{j+1} = \bar{M}_j + \frac{1}{6} (\bar{A} + 4\bar{B} + \bar{C});$$

$$t_{j+1} = t_j + \Delta t,$$

где  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$  — векторы;  $j$  — количество шагов;  $\Delta t$  — шаг интегрирования;  $t$  — это параметр интегрирования ( $dt = ds/n$ ).

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \bar{D}(\bar{R}_j) \Delta t; \\ \bar{B} &= \bar{D} \left( \bar{R}_j + \frac{1}{2} \bar{M}_j \Delta t + \frac{1}{8} \bar{A} \Delta t \right); \\ \bar{C} &= \bar{D} \left( \bar{R}_j + \bar{M}_j \Delta t + \frac{1}{2} \bar{B} \Delta t \right) \Delta t,\end{aligned}$$

где в соответствии с (1.14)

$$\bar{D}(\bar{R}_j) = n \operatorname{grad} n \Big|_{\bar{R}=\bar{R}_j}.$$

Конкретный вид выражения для вычисления вектора  $\bar{D}(\bar{R})$  зависит от выбранной формы уравнения РПП —  $n(x, y, z)$  или  $n^2(x, y, z)$ .

## 1.2. Способы описания поверхности оптических элементов и неоднородного показателя преломления

Поверхности ОС разграничивают оптические среды с разными показателями преломления, что позволяет получать системы с заданными оптическими характеристиками. В общем случае поверхности могут быть несферическими, однако наиболее технологичными являются сферы. Рассмотрим способы и законы описания поверхностей ОС и ПП.

Поверхности, ограничивающие оптические элементы, в общем случае можно задавать как асферические:

$$x^2 + y^2 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots = 0. \quad (1.16)$$

Для асферической поверхности (АП) 2-го порядка существует другая форма записи (1.16):

$$x^2 + y^2 = 2r_0 z - (1 - e^2) z^2,$$

где  $e, r_0$  — соответственно эксцентриситет и радиус кривизны поверхности при вершине.

Известны также и другие уравнения, например:

$$\begin{aligned}z &= a_1(x^2 + y^2) + a_2(x^2 + y^2)^2 + a_3(x^2 + y^2)^3 + \dots, \\ z &= \frac{\rho_k(x^2 + y^2)}{1 + \sqrt{1 - a_1 \rho_k^2(x^2 + y^2)}} + a_2(x^2 + y^2)^2 + a_3(x^2 + y^2)^3 + \dots, \quad (1.17)\end{aligned}$$

где  $\rho$  — кривизна поверхности при вершине;  $a_1, a_2, a_3, \dots$  — коэффициенты.

Наиболее распространенные оптические поверхности — сферу и плоскость — можно представить выражениями (1.16), (1.17).

Распределение ПП  $n_k(x, y, z)$  осевой симметрии в  $k$ -й среде ОС обычно задают полиномом

$$n_k = n_k(z, r) = n_{0,k}(z) + n_{1,k}(z)r^2 + n_{2,k}(z)r^4 + \dots, \quad (1.18)$$

где  $z$  — расстояние до точки ГрОСр с координатами  $(x, y, z)$ , взятое от некоторой опорной плоскости, перпендикулярной оптической оси;  $r$  — расстояние от оптической оси до точки среды,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $n_{0,k}(z)$ ,  $n_{1,k}(z)$ ,  $n_{2,k}(z)$ , ... — степенные многочлены:

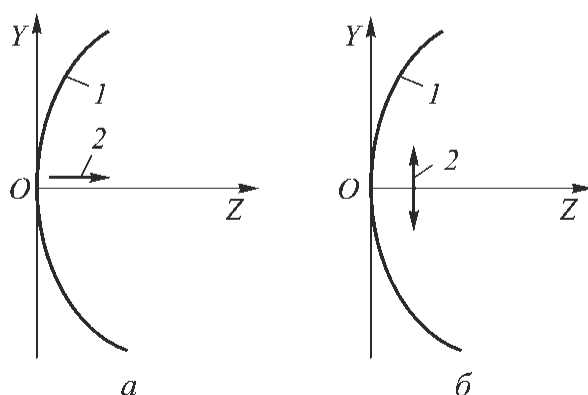
$$\begin{aligned} n_{0,k}(z) &= n_{00,k} + n_{01,k}z + n_{02,k}z^2 + \dots; \\ n_{1,k}(z) &= n_{10,k} + n_{11,k}z + n_{12,k}z^2 + \dots; \\ n_{2,k}(z) &= n_{20,k} + n_{21,k}z + n_{22,k}z^2 + \dots \end{aligned} \quad (1.19)$$

Опорная плоскость может проходить через вершину первой поверхности, ограничивающей  $k$ -ю среду ОС, и быть внутри линзы, если градиентная зона примыкает к выходной поверхности линзы.

На рис. 1.2 приведены два вида распределений показателя преломления: осевое (ОРПП) и радиальное (РРПП). Функции ОРПП и РРПП описывают полиномами по координатам  $z$  и  $r$  соответственно:

$$n_k(z) = n_{00,k} + n_{01,k}z + n_{02,k}z^2 + \dots, \quad (1.20)$$

$$n_k(r) = n_{00,k} + n_{10,k}r^2 + n_{20,k}r^4 + \dots. \quad (1.21)$$



**Рис. 1.2.** Иллюстрация ОРПП (а) и РРПП (б):

1 — оптическая поверхность; 2 — направление распределения показателя преломления

Сфероконцентрическое распределение показателя преломления (СРПП) можно задать функцией

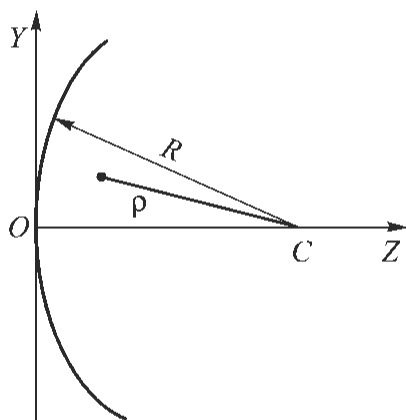
$$n_k(x, y, z) = n_k(\xi) = n_{0,k} + n_{1,k}\xi + n_{2,k}\xi^2 + n_{3,k}\xi^3 + \dots,$$

где  $\xi = x^2 + y^2 + (z - \bar{z})^2$ ;  $x, y, z$  — координаты точки  $k$ -й среды в местной прямоугольной системе координат, связанной с вершиной поверхности входа луча в среду;  $\bar{z}$  — положение центра СРПП;  $n_{0,k}, n_{1,k}, n_{2,k}, \dots$  — коэффициенты.

Иногда СРПП задают в виде полинома в сферической системе координат (рис. 1.3):

$$n(R - \rho) = n_{\rho 0} + n_{\rho 1}(R - \rho) + n_{\rho 2}(R - \rho)^2 + n_{\rho 3}(R - \rho)^3 + \dots, \quad (1.22)$$

где  $R$  — технологический радиус формирования сфероконцентрической неоднородности ПП;  $\rho$  — текущая координата;  $n_{\rho 0}$  — ПП на поверхности линзы;  $n_{\rho 1}, n_{\rho 2}, n_{\rho 3}$  — коэффициенты.



**Рис. 1.3.** Схема с РПП в сферической системе координат:  
 $\rho$  — текущая координата;  $R$  — технологический радиус

В простейшем случае линейного СРПП (1.22) коэффициенты для тонкой линзы в декартовой системе координат в начальном приближении будут следующие:

$$\begin{aligned} n_{00} &= n_{\rho 0}; \quad n_{01} = n_{\rho 1}; \quad n_{10} = \frac{-n_{\rho 1}}{2R}; \quad n_{11} = \frac{n_{\rho 1}}{2R^2}; \\ n_{20} &= \frac{n_{\rho 1}}{8R^3}; \quad n_{21} = n_{\rho 1} \frac{3}{8R^4}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Несмотря на то что формулы (1.23) являются первым приближением, они могут быть полезны на начальном этапе синтеза линзы, имеющей СРПП, поскольку устанавливают исходные соотношения между коэффициентами в сферической и прямоугольной системах координат.

Известен и другой вид уравнений, определяющих РПП:

$$n_k^2 = n_k^2(z, \eta) = n_{0,k}(z) + n_{1,k}(z)\eta + n_{2,k}(z)\eta^2 + \dots,$$

где  $\eta = x^2 + y^2$ , а коэффициенты  $n_{0,k}(z)$ ,  $n_{1,k}(z)$ ,  $n_{2,k}(z)$ , ... представляют как

$$n_{0,k}(z) = n_{00,k}^2 + n_{01,k}z + n_{02,k}z^2 + \dots;$$

$$n_{1,k}(z) = n_{10,k} + n_{11,k}z + n_{12,k}z^2 + \dots;$$

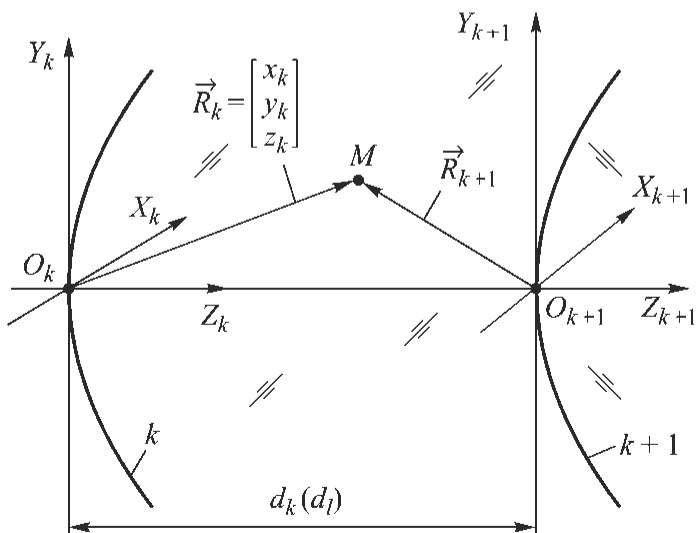
$$n_{2,k}(z) = n_{20,k} + n_{21,k}z + n_{22,k}z^2 + \dots$$

Для РПП отнесенная к меридиональной плоскости функция ПП часто приобретает вид

$$n^2(y) = n_{00}^2 \left( 1 - g^2 y^2 + h_4 (gy)^4 + h_6 (gy)^6 + h_8 (gy)^8 + \dots \right), \quad (1.24)$$

где  $g$ ,  $h_4$ ,  $h_6$ ,  $h_8$  — коэффициенты.

Каждая среда ОС характеризуется функцией РПП, которую принято записывать в местной системе координат, связанной с первой по ходу луча поверхностью, ограничивающей среду (рис. 1.4).



**Рис. 1.4.** Местные системы прямоугольных координат в описании оптической системы по формулам Федера



В осесимметричной центрированной ОС переход от  $k$ -й к  $(k + 1)$ -й системе координат Федера осуществляют по формуле

$$\bar{R}_{k+1} = \bar{R}_k - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_k \end{pmatrix}$$

или  $x_{k+1} = x_k$ ;  $y_{k+1} = y_k$ ;  $z_{k+1} = z_k - d_k$ , где  $\bar{R}_{k+1}$ ,  $\bar{R}_k$  — векторы координат точки в  $(k+1)$ - и  $k$ -й системах координат;  $d_k$  — расстояние между вершинами  $k$ - и  $(k+1)$ -й поверхностей (см. рис. 1.4).

### 1.3. Расчет траектории реального луча

Расчет траектории произвольного луча, проходящего через оптическую систему с однородными и градиентными элементами, является основой для решения известными методами геометрической оптики задач по анализу, синтезу и оптимизации ОС. Реальный луч (для градиентной и однородной систем) рассчитывают по формулам Федера, включающим направляющий косинус угла луча с осями  $Y$ ,  $X$ ,  $Z$ .

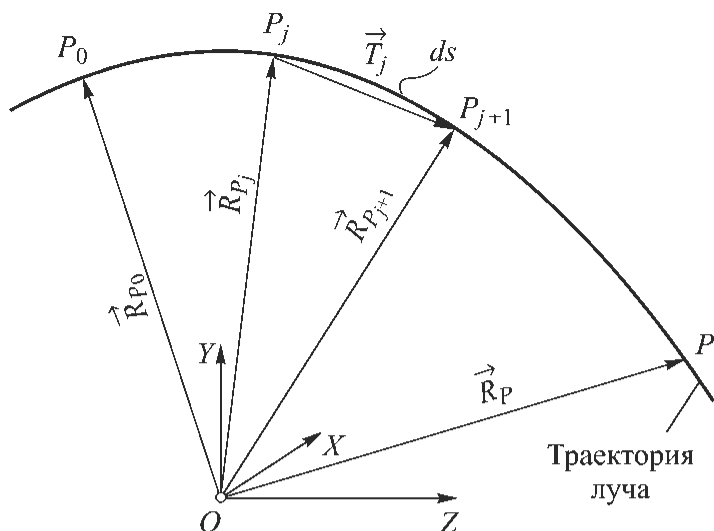
Расчет хода луча состоит из нескольких этапов: определение траектории луча в оптической среде (ОСр) пространства предметов и точки встречи луча с поверхностью  $\Phi(\bar{R}) = 0$  ограничивающей среды (на входе и выходе луча); вычисление начальных условий при входе в следующую среду (преломление на границе раздела двух сред).

Геометрические световые лучи — это линии, ортогональные к волновым фронтам (геометрическим волновым поверхностям). Как показано в 1.1, ход луча в изотропной неоднородной ОСр описывается векторным лучевым уравнением (1.4), в котором

$$\frac{d\bar{R}}{ds} = \bar{T}(\bar{R}) = \begin{bmatrix} dx/ds \\ dy/ds \\ dz/ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{bmatrix},$$

где  $\bar{T}(\bar{R})$  — оптический лучевой вектор в точке траектории с координатой  $\bar{R}$  (рис. 1.5);  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  — направляющие косинусы луча.

Как было показано ранее, от параметрической формы описания траектории луча переходят к системе дифференциальных уравнений



**Рис. 1.5.** Траектория действительного луча в градиентной среде, задаваемая радиус-вектором  $\vec{R}_j$

по независимой координате  $z$ . Эта система пригодна к прямому численному интегрированию методами, рассмотренными в 1.1.

Для оптической однородной среды  $n(\vec{R}) = \text{const}$ , луч описывают уравнением прямой и перемещение от точки  $\vec{R}$  к  $\vec{R}'$  вдоль луча на расстояние  $s$  составляет

$$\vec{R}' = \vec{R} + \vec{T}s; \quad x' = x + \lambda s; \quad y' = y + \mu s; \quad z' = z + \nu s,$$

где  $x', y', z'$  — координаты точки на траектории луча на выходе из ОСр.

Определим точку  $P$  пересечения луча с поверхностью  $\Phi(\vec{R})$  (см. рис. 1.6). В процессе вычисления траектории луча на каждом шаге интегрирования, т. е. для каждого  $\vec{R}_j$ , отслеживаем знак функции  $\Phi(\vec{R})$ : если при переходе от шага  $j$  к  $(j+1)$  функция меняет свой знак, то это является сигналом события пересечения лучом поверхности. Тогда необходимо повторить вычисления на  $j$ -м шаге с уменьшением последнего на  $\Delta t$ . Координаты точки  $P$  пересечения лучом поверхности следует устанавливать с заранее заданной точностью.

Преломление луча на границе двух сред описывает закон Снеллиуса, который представим в векторной форме:

$$n'(\vec{N}\vec{T}') = n(\vec{N}\vec{T}), \quad (1.25)$$

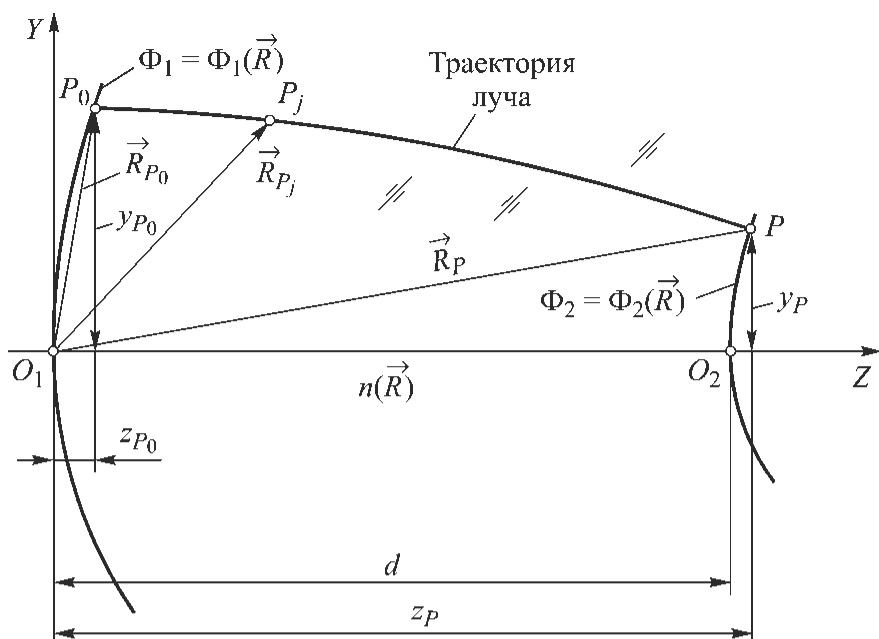


Рис. 1.6. К выводу уравнений для расчета точки пересечения луча с ограничивающей средой поверхностью

где  $n$ ,  $n'$  — показатели преломления первой и второй ОСр в точке  $P$  падения луча на поверхность раздела сред;  $\vec{N}$  — вектор нормали к поверхности раздела в точке  $P$ ;  $\vec{T}$ ,  $\vec{T}'$  — направляющие косинусы падающего и преломленного лучей:

$$\vec{N}(x, y, z) = \text{grad } \Phi = \nabla \Phi = \begin{bmatrix} \partial \Phi / \partial x \\ \partial \Phi / \partial y \\ \partial \Phi / \partial z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{bmatrix}, \quad (1.26)$$

где  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_z$  — координаты  $\vec{N}$  по осям  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .

Из (1.25) с учетом (1.26) находим

$$n\vec{T}' = n\vec{T} + \gamma\vec{N}, \quad \gamma = \sqrt{n'^2 - n^2 + (n\vec{N}\vec{T})^2} - n\vec{N}\vec{T}$$

или

$$\vec{T} = \frac{n}{n'}\vec{T}' + \epsilon\vec{N}, \quad \epsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'}\right)^2 (1 + \vec{N}\vec{T})} - \left(\frac{n}{n'}\right)\vec{N}\vec{T}.$$

При расчете траектории действительного луча в ОС (содержащей как неоднородные, так и однородные оптические элементы), расположенной в однородных по показателю преломления средах про-

странств предметов и изображений, формулы Федера несколько видоизменяют, переходя к оптическим направляющим косинусам:

$$e_{k+1} = -[(z_k - d_k)l_{k+1} + y_k q_{k+1} + x_k p_{k+1}] / n_{k+1};$$

$$\eta_{k+1} = e_{k+1} l_{k+1} / n_{k+1} + (z_k - d_k);$$

$$A_{k+1}^2 = (z_k - d_k)^2 + y_k^2 + x_k^2 - e_{k+1}^2;$$

$$P_{k+1} = A_{k+1}^2 \rho_{k+1} - 2\eta_{k+1};$$

$$j_{k+1} = \sqrt{(l_{k+1}^2 - P_{k+1} \rho_{k+1} n_{k+1}^2)};$$

$$\bar{d}_{k+1} = e_{k+1} + P_{k+1} / (l_{k+1} + j_{k+1}) n_{k+1};$$

$$z_{k+1} = (z_k - d_k) + \bar{d}_{k+1} l_{k+1} / n_{k+1};$$

$$y_{k+1} = \bar{d}_{k+1} q_{k+1} / n_{k+1} + y_k;$$

$$x_{k+1} = x_k + \bar{d}_{k+1} P_{k+1} / n_{k+1};$$

$$q_{k+1} = q'_{k+1} - j_{k+1};$$

$$q'_{k+1} = \sqrt{n_{k+2} - n_{k+1}^2 + j_{k+1}^2};$$

$$l_{k+2} = l_{k+1} - g_{k+1} (z_{k+1} \rho_{k+1} - 1);$$

$$q_{k+2} = q_{k+1} - g_{k+1} y_{k+1} \rho_{k+1};$$

$$P_{k+2} = P_{k+1} - g_{k+1} x_{k+1} \rho_{k+1},$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots, m$  — номер поверхности в ОС при условии, что за нулевую принята плоскость входного зрачка;  $e_{k+1}, \eta_{k+1}, A_{k+1}^2, P_{k+1}, g_{k+1}$  — вспомогательные величины;  $q_{k+1}$  — угол преломления;  $n_{k+1}, n_{k+2}$  — показатели преломления соответственно до и после поверхности  $(k+1)$ ;  $\bar{d}_{k+1}$  — косая толщина;  $j_{k+1}$  — угол падения на поверхность  $(k+1)$ ;  $p_{k+2}, q_{k+2}, l_{k+2}$  — оптические направляющие косинусы луча после преломления на поверхности  $(k+1)$ .

Во время проектирования ОС помимо действительных лучей при расчетах используют бесконечно узкие пучки, в частности, их применяют для определения астигматических отрезков  $z'_s$  и  $z'_m$ .

В программах для градиентных ОС расчет бесконечно близких лучей узких наклонных пучков проводится для действительных лучей, идущих на конечном малом расстоянии.

### **Вопросы для самопроверки**

1. Приведите форму записи лучевого уравнения в скалярном и векторном видах.
2. Запишите систему дифференциальных уравнений в прямоугольной системе координат для случаев радиального и осевого РПП.
3. В чем отличие оптических направляющих косинусов для градиентной и однородной оптических сред?
4. Поясните особенность метода Шарма по сравнению с универсальным методом расчета траектории реального луча в ГрОСр.
5. Приведите известные способы описания оптических поверхностей в ОС осевой симметрии.
6. Какова форма записи полинома РПП для осесимметричной оптической среды?
7. Охарактеризуйте функции, описывающие РПП, ОРПП и СРПП.
8. Назовите и охарактеризуйте содержание основных этапов расчета траектории реального луча через ОС с однородными и неоднородными оптическими средами.
9. В чем особенность применения формул Федера для случая ОС с ГрОЭ?

## **2. ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ И ОПТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРАДИЕНТНЫХ СРЕД И ЭЛЕМЕНТОВ**

Долгое время недостаточное развитие технологии градиентных сред было сдерживающим фактором в совершенствовании методов расчета и проектирования систем, содержащих ГрОЭ. Однако в последние десятилетия появилась информация о получении градиента в ПП стекол, кристаллов и полимеров, что дало импульс в развитии методов расчета ГрОС. Преимущества использования градиентных элементов могут быть реализованы при условии получения высоких оптических характеристик ОС, обеспечения воспроизводимости и идентичности параметров ГрОЭ в серийном производстве.

### **2.1. Обзор технологий градиентных сред**

Существуют две развитые технологии изготовления градиентных оптических стекол: внешняя ионообменная диффузия стекло — расплав соли и внутренняя диффузия порошков или пластин стекол. Первую из них используют при производстве элементов с РРПП и ОРПП (в основном градианов), вторую — для линзовых элементов с ОРПП. Если базовой средой является полимер, то применяется технология, основанная на сополимеризации исходных мономеров под действием ультрафиолетового или лазерного излучений.

Существующая с 60—70-х годов XX в. технология физико-химической обработки стекла — ионообменная диффузия — основана на процессе ионного обмена между стеклом и солевым расплавом. В настоящее время эту технологию продолжают совершенствовать в США (фирмы LightPaht, Gradient Lens Corp.), Германии (фирмы GRINTECH, SCHOTT), Китае. В России ограниченную номенклатуру градиентных элементов с РРПП и ОРПП выпускает ЗАО «Гринекст». Ионообменная технология как метод изменения ПП стекла

отличается высокой воспроизводимостью параметров и возможностью коррекции диффузионных распределений ПП изменением состава солевого расплава, температуры и времени обработки.

Типы компонентов ионного обмена, используемые в технологии поверхностной обработки, представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Характеристики различных типов ионного обмена

Типы ионного обмена	Числовые апертуры (NA)	Диаметр графана, мм	Область применения
$\text{Li}^+_{\text{стекло}} \leftrightarrow \text{Na}^+_{\text{расплав}}$	0,05—0,23	0,3—3	Жесткие эндоскопы
$\text{Tl}^+_{\text{стекло}} \leftrightarrow \text{K}^+_{\text{расплав}}$	0,3—0,7	0,3—3	Жесткие эндоскопы, устройства ВОЛС
$\text{Ag}^+_{\text{стекло}} \leftrightarrow \text{Na}^+_{\text{расплав}}$	0,23—0,48	0,3—80	Жесткие эндоскопы, устройства ВОЛС, линзы с ОРПП

К основным технологическим характеристикам ГрОСр относятся: глубина слоя неоднородного ПП; перепад ПП ( $\Delta n$ ); угловой коэффициент (наклон) функции  $n(z)$  для сред с ОРПП ( $\psi$ ).

В табл. 2.2 приведены основные характеристики известных технологий получения ГрОСр.

Таблица 2.2

Характеристики градиентной среды при различных технологиях ее получения

Технология изготовления ГрОСр	Глубина градиентной области, мм	Перепад ПП, $\Delta n$
<b>На основе стекла:</b>		
закалка	2,5	До 0,045 (К8)
сплав шихты переменного состава	20	0,02
сплав слоев стекла переменного состава	10	0,15
нейтронное облучение	0,1	0,02
рентгеновское облучение	0,1	$6 \cdot 10^{-6}$

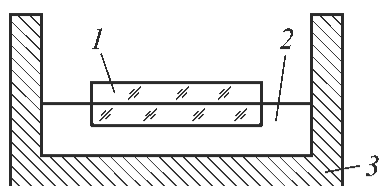
Технология изготовления ГрОСр	Глубина градиентной области, мм	Перепад ПП, $\Delta n$
осаждение слоев стекла из парогазовой фазы	1,0	0,03
ионное наполнение	10,0	0,15
ионный обмен	10,0	0,04
<b>Материалы для ИК-диапазона:</b>		
выращивание кристаллов		
Ge—Si	20,0	0,15
ZnSe—ZsnS	10,0	0,24
Примечание. В полимерных ГрОСр глубина градиентной области составляет 20 мм, а $\Delta n = 0,15$ .		

Метод химического осаждения слоев стекла из парогазовой фазы широко используют в промышленном производстве градиентных сверхпрозрачных оптических волокон. Попытки изготовления градиентных слоев в стекле под действием рентгеновского и нейтронного облучений позволили получить небольшой перепад ПП на малой глубине, к тому же облученные стекла в некоторых случаях имели наведенную радиоактивность.

Высокие требования к воспроизводимости характеристик оптических сред выдвигают на первый план те способы формирования градиентных (GRIN) материалов, которые регулируются физико-химической природой процесса. В этом случае преимущество принадлежит подчиняющемуся термодинамическим закономерностям методу ионообменной диффузии — ее можно проводить как в системах стекло—расплав солей (внешняя диффузия), так и в системах, состоящих из двух или нескольких последовательных слоев или порошков тонкодробленых стекол различного состава, находящихся в диффузионном контакте в интервале температур размягчения стекла (внутренняя диффузия).

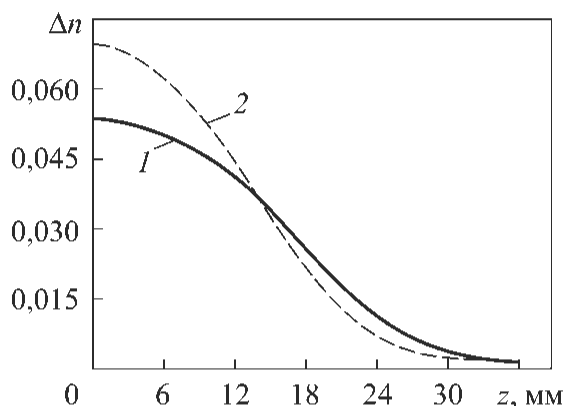
Моделирование ГрОЭ включает создание физических моделей коэффициента диффузии, функции ПП, спектральных характеристик, термических и механических свойств ГрОСр. В качестве примера на рис. 2.1 приведена схема технологического процесса ионной





**Рис. 2.1.** Схема формирования заготовки с ОРПП на основе стекла BL24:

1 — заготовка; 2 — расплав AgCl; 3 — ванна



**Рис. 2.2.** Графики распределения показателя преломления:

1 — после отжига в течение 168 ч при  $t = 515^\circ\text{C}$ ;

2 — после диффузионной обработки

обработки ГрОЭ с ОРПП из стекла BL2406 фирмы Bausch and Lomb (США). Состав стекла:  $\text{SiO}_2$  — 67 %;  $\text{Na}_2\text{O}$  — 25,6 %;  $\text{Al}_2\text{O}_3$  — 7,4 %. Конфигурация исходной заготовки — цилиндр диаметром 40 мм и высотой 50 мм. Расплав соли: один килограмм AgCl с одним процентом NaCl; температура  $t = 515^\circ\text{C}$ . Время прохождения диффузионного процесса составляет 960 ч (40 сут). Графики РПП до и после операции отжига (в течение 168 ч) приведены на рис. 2.2. Анализ графика показывает, что он имеет вид гауссианы на глубину  $\sim 17$  мм с  $\Delta n = 0,036$  (до отжига) и  $\Delta n = 0,028$  (после отжига), а в средней части включает участок с зависимостью, близкой к линейной  $n(z)$ .

Далее приведен обзор производителей элементов градиентной оптики и применяемые у них математические закономерности описания функций и дисперсий ПП.

*Стекла Gradium<sup>TM</sup>*. Фирма Light Path (США) выпускает линзы с ОРПП под названием GRADIUM<sup>TM</sup>. Номенклатура включает ряд типов в двух модификациях: с возрастанием и убыванием функции ПП

от поверхности линзы на глубину 5,8...14,8 мм. Функцию РПП заготовки линзы представляют полиномом 11-й степени:

$$n(z)=\sum_{i=0}^{11}n_i\left(\frac{z}{z_m}\right)^i=n_0+n_1\left(\frac{z}{z_m}\right)+n_2\left(\frac{z}{z_m}\right)^2+...+n_{11}\left(\frac{z}{z_m}\right)^{11},$$

где  $z_m$  — максимальная глубина градиентной зоны;  $n_0$  — ПП на оси ГрОЭ.

Дисперсионное выражение — модифицированная формула Зельмейера:

$$n(\lambda)^2-n(\lambda_{оп})^2=\sum_i\frac{K_i\lambda^2}{\lambda^2-L_i},$$

где  $n(\lambda_{оп})$  — ПП на опорной длине волны;  $K_i, L_i$  — константы, определяемые как

$$K_i=\sum_{j=1}^kK_{ij}\left[n(z,\lambda_0)\right]^{j-1},\quad L_i=\sum_{j=1}^kL_{ij}\left[n(z,\lambda_0)\right]^{j-1},$$

$\lambda_0$  — длина волны в мкм;  $K_{ij}, L_{ij}$  — коэффициенты.

Параметры градиентных стекол *Gradium*<sup>TM</sup> (максимальная глубина градиентной зоны  $z_m$  и показатель преломления  $n_0$  на оси для длины волны излучения  $\lambda = 587$  нм) приведены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Параметры градиентных стекол *Gradium*<sup>TM</sup>

Код стекла	$z_m$ , мм	$n_0$
G14SFN	5,8	1,8049
G14SFP	5,8	1,6489
G51SFN	14,8	1,7446
G51FP	14,8	1,6982
G4SLAKN	13,931	1,7384
G4LAKP	13,931	1,6726

Стекла *Selfok*<sup>TM</sup>. Для выпускаемых фирмой GO!FOTON элементов *Selfok*<sup>TM</sup> используют РППП вида

$$n(r)=n_0\left(1-\frac{A}{2}r^a\right),$$

где  $a = 2$ ;  $A = \frac{2 \Delta n}{n_0 r_k^a}$ ;  $\Delta n$  — перепад ПП;  $r_k$  — половина диаметра ГрОЭ.

В табл. 2.4 показаны параметры элементов *Selfok*: ПП на оси ( $n_0$ ) и диаметр, входящий в кодовое обозначение, например, элемент SLN20 имеет диаметр 2,0 мм.

Таблица 2.4

**Значение показателя преломления  $n_0$  по оси градиентных стекол различных марок**

Марка стекла	$n_0$	Марка стекла	$n_0$	Марка стекла	$n_0$
SLN20	1,5845	SLA12A	1,5900	GT050-08	1,623
SLW20	1,5868	SLW18	1,5868	GT100-08	1,623
SLA12	1,5930	SLA09	1,5845	GT180-06	1,623
SLS10	1,5477	SLA20A	1,6098	GT050-13	1,616
SLW30	1,5868	EG10	1,5204	GT050-13	1,616
SLA06A	1,5238	EG20	1,5204	GT180-13	1,616
SLS20	1,5477	EG27	1,5204	GT050-15	1,615
SLH18	1,6294	EG31	1,5204	GT100-15	1,615
SLA09A	1,5845	GTO50-06	1,62885	GT180-15	1,615
SLW10	1,5868	GT100-06	1,62885	GT100	1,530
SLA06	1,5238	GT180-06	1,62885	GT180	1,530

Стекла фирмы *Gradient Lens Corp.* Распределение ПП задается формулой  $n(r) = n_{00} + n_{10}r^2 + n_{20}r^4$ , в которой дисперсионные значения коэффициентов  $n_{00}$ ,  $n_{10}$ ,  $n_{20}$  рассчитывают следующим образом:

$$n_{ij}(\lambda) = A + B\lambda^2 + \frac{C}{\lambda^2} + \frac{D}{\lambda^4},$$

где  $\lambda$  — в нм.

В табл. 2.4 приведены также параметры ГрОЭ: ПП на оси и диаметр, входящий в кодовое обозначение, так элемент EG10 имеет диаметр 1,0 мм.

Стекла фирмы *Grintech Radial Gradient*. У этих стекол РППП определяют из выражения

$$n(y) = n_0 \operatorname{sech}(gy) = \frac{n_0}{\cosh(gy)},$$

где  $g$  — фокусирующая константа или константа РПП размерностью  $\text{мм}^{-1}$ .

Дисперсионная зависимость

$$n_0(\lambda) = 1,61189 + \frac{7614}{\lambda^2}.$$

Кодовые обозначения элементов и ПП на оси также находятся в табл. 2.4, например GT180-13.

*Градиентная среда Рочестерского университета.* Для такой среды РПП общего вида  $n(x, y, z)$  задается полиномом

$$n(r, z) = n_{00} + n_{01}z + n_{02}z^2 + n_{03}z^3 + n_{04}z^4 + n_{10}r^2 + n_{20}r^4 + n_{30}r^6 + n_{40}r^8,$$

который детализируют как РРПП или ОРПП с помощью коэффициентов перед  $z$  или  $r^2$ .

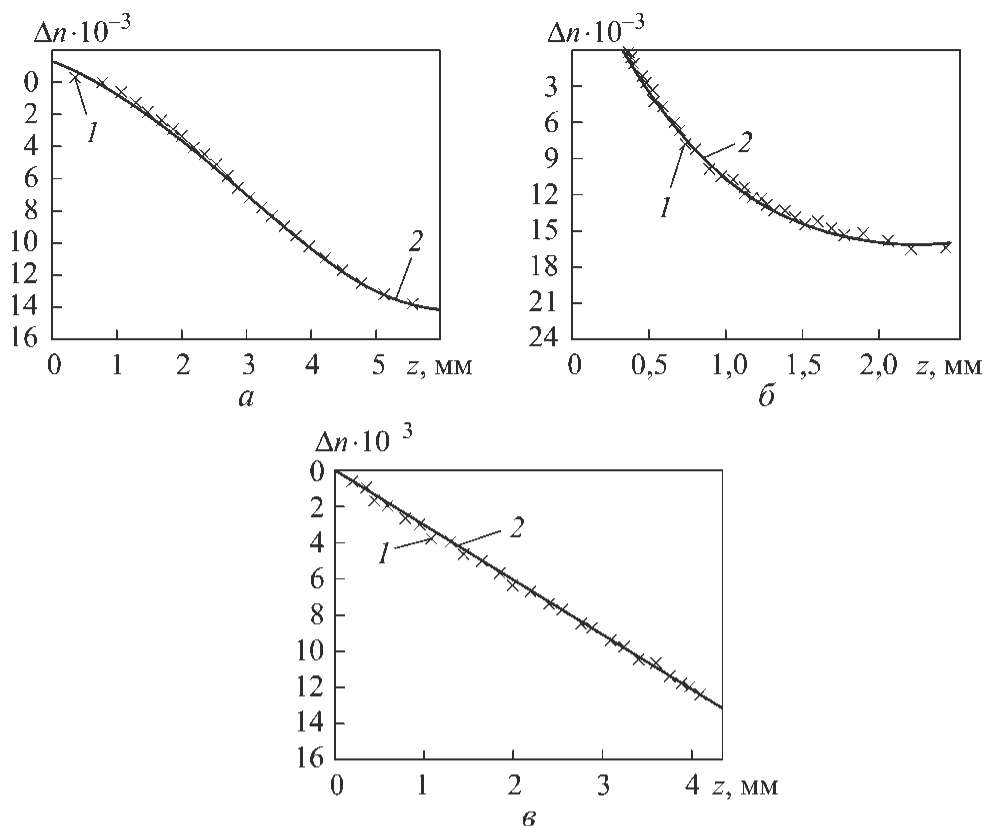
## 2.2. Оптические свойства сред с осевым распределением показателя преломления

В данном подразделе приведены характеристики стекол с ОРПП, полученным методом ионообменной диффузии. Световые диаметры линзовых элементов составляют несколько сантиметров, что позволяет использовать их при проектировании систем высокого качества в оптическом видимом диапазоне.

Измерения РПП проводят на модуляционном интерферометре, дающем на выходе электронного блока сигнал, пропорциональный показателю преломления в точке измерений. Изготовление линз с ОРПП открывает перспективы дальнейшего совершенствования ОС.

**Регрессионное описание функции РПП.** Профили РПП в стеклах BL15 (Bausch&Lomb), S2 (Schott), FM40 (Рочестерский университет) представлены на рис. 2.3. Данные при сканировании образца получены по результатам измерений в 70—80 точках.

Чтобы применить в расчетах ОС полученные данные по РПП, выполняют регрессионный анализ на гауссову кривую либо на степенной полином. Результаты такого анализа позволяют рассчитывать системы с использованием реальных параметров градиентной среды.



**Рис. 2.3.** Профили распределений показателя преломления различных стекол:

*a* — BL-15,  $\lambda = 0,5145$  мкм, обмен Ag—Na; *б* — S2,  $\lambda = 0,6471$  мкм, обмен Li—Na;  
*в* — FM40,  $\lambda = 0,5145$  мкм, обмен Li—Na; 1 — экспериментальные точки;  
 2 — усредненная линия

В табл. 2.5 приведены результаты регрессии осевого РПП пластины из стекла BL15 на нелинейный ( $az^4 + bz + c$ ) и линейный ( $az + b$ ) полиномы для  $\lambda = 0,5145$  мкм.

Таблица 2.5

**Результаты регрессии на полином в образцах стекла BL15**

Образец	Область анализа РПП, мм	Результаты регрессии для разных полиномов	
		$az^4 + bz + c$	$az + b$
BL15A7	0,7...6,3	$-0,033355z + 0,023356z^4$	$-0,028142z$
BL15B1	0,7...6,3	$-0,034156z + 0,028267z^4$	$-0,027923z$
BL15C1	0,7...6,5	$-0,034006z + 0,025187z^4$	$-0,028050z$

Формула регрессионного анализа на гауссову кривую:

$$\Delta n = a + b \exp \left[ -c(x - d)^2 \right].$$

По значениям коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  рассчитывают максимальный угол наклона кривой РПП (градиент ПП) и его положение относительно первой поверхности:

$$\psi_{\max} = -b\sqrt{2c} \exp \left( -\frac{1}{2} \right),$$

$$z_{\psi_{\max}} = \sqrt{\frac{1}{2c}} + d.$$

Результаты регрессии РПП на гауссову кривую в пластине из стекла BL15 для  $\lambda = 0,5145$  мкм показаны в табл. 2.6.

Таблица 2.6

**Результаты регрессии РПП на гауссову кривую  
в образцах стекла BL15**

Образец	$z_{\psi_{\max}}$ , мм	$\psi_{\max}$ , см <sup>-1</sup>	Максимальное отклонение от кривой, %
BL15A7	2,772	-0,0351	0,19
BL15B1	2,595	-0,0355	0,21
BL15C1	2,738	-0,0358	0,26

Из сравнения двух типов регрессий следует, что они находятся в соответствии друг с другом. В общем виде наилучшим образом подходящий полином содержит 1-, 2- и 4-ю степени ряда и имеет максимальное отклонение от экспериментальных точек, равное 2 %. Для гауссовой кривой такое отклонение составляет 0,3 %.

**Воспроизводимость профиля РПП.** Эту характеристику проверяли на десяти образцах стекол одного сорта двух различных плавок с использованием идентичной процедуры диффузионной обработки. Результаты приведены в табл. 2.7. Анализировали воспроизводимость РПП марок от BL14 до BL24 для полиномиального и гауссова представлений в области 1,1...4,4 мм от края образца.

## Результаты исследования на воспроизводимость профиля РПП

Образец	Плавка	Полиномиальное представление		Гауссова кривая	
		50 % от $z_m$ , мм	$n_{01}$ , см <sup>-1</sup>	$\psi_{\max}$ , см <sup>-1</sup>	Полуши- рина, мм
BL14A2	10225	2,73	-0,03251	-0,0355	2,541
BL15A2	»	2,99	-0,03299	-0,0362	2,491
BL17A1	»	2,62	-0,03201	-0,0355	2,443
BL18A1	»	2,83	-0,03537	-0,0387	2,477
BL19A1	»	2,75	-0,03175	-0,0349	2,463
BL20B1	10215	2,80	-0,03134	-0,0345	2,525
BL21A1	10225	2,65	-0,03175	-0,0356	2,443
BL22A1	10225	2,78	-0,03023	-0,0337	2,386
BL23A1	10215	2,90	-0,03441	-0,0377	2,467
BL24A1	10225	2,75	-0,03266	-0,0361	2,328

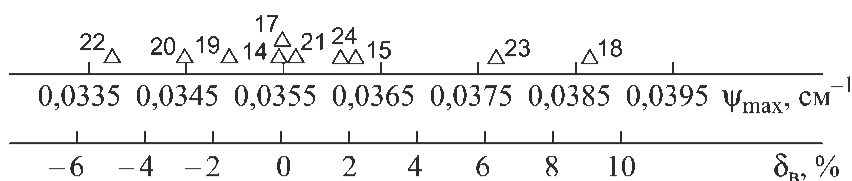
Значения коэффициента наклона кривой  $n_{01}$  в зависимости от места расположения градиентной зоны на образце при полиномиальном представлении РПП приведены в табл. 2.8. Коэффициент  $n_{01}$  является основным элементом в каждом из многочленов. Погрешность представления составила приблизительно 7 %. Однако такой анализ очень чувствителен к интервалу зоны неоднородности ПП (градиентной зоне). Для образцов BL18 и BL23 показаны значения  $n_{01}$ , рассчитанные для разных интервалов зоны РПП. Погрешность составила 2 %.

Таблица 2.8

Зависимость коэффициента  $n_{01}$  от места расположения градиентной зоны на образце

Образец	Интервал градиентной зоны, мм	$n_{01}$ , см <sup>-1</sup>
BL18A2	1,0...4,2	-0,035159
BL18A2	1,0...4,5	-0,034563
BL23A1	1,2...4,3	-0,034406
BL23A1	1,2...4,7	-0,033769

Погрешность гауссова представления (см. табл. 2.6) равна 0,3 %. Максимальный наклон кривой РПП приходится на ее точку переги-



**Рис. 2.4.** Диаграмма точности воспроизводимости градиентной оптической среды марки BL:  $\delta_B$  — погрешность

ба. На рис. 2.4 изображена диаграмма точности воспроизводимости градиентных стекол марки BL.

**Дисперсионные зависимости РПП.** Для однородных стекол дисперсия показателя преломления — хорошо изученная характеристика. Типичный крон с номинальным значением  $n = 1,52$  имеет в видимой области спектра изменение показателя преломления  $\Delta n = 0,012$  (около 0,8 %). У градиентных сред существуют также дисперсионные зависимости. В табл. 2.9 приведены результаты измерений  $\Delta n$  в образце BL15 для разных длин волн  $\lambda$ .

Таблица 2.9

**Изменение показателя преломления  $\Delta n$  в стекле BL15 для разных длин волн  $\lambda$**

Номер образца	$\lambda$ , мкм	$\Delta n$
61	0,4579	0,0155
51	0,5145	0,0146
38	0,6764	0,0143

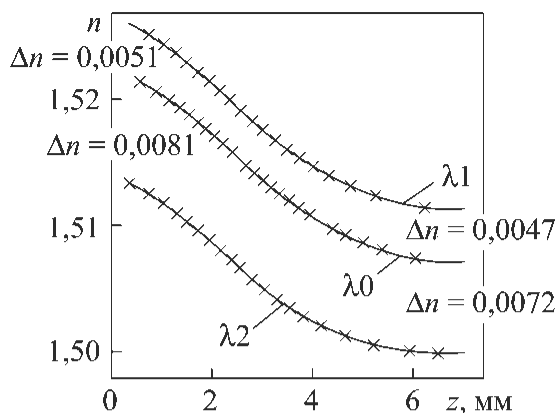
При линейном представлении РПП и толщине градиентного элемента 5,8 мм изменение спектрального коэффициента  $n_{01}$  для синей ( $\lambda_1 = 0,4579$  мкм) и красной ( $\lambda_2 = 0,6764$  мкм) областей диапазона относительно желто-зеленой области ( $\lambda_0 = 0,5145$  мкм) составляет соответственно 6,16 % и –2,055 %. Относительная дисперсия градиента ПП  $(n_{01\lambda_1} - n_{01\lambda_2})/n_{01\lambda_0}$  равна 8,22 % (табл. 2.10).

Таблица 2.10

**Изменение коэффициентов — спектрального  $n_{01}$  и дисперсии  $v_{01}$  ГрОСр для разных длин волн  $\lambda_i$**

$\lambda_i$	$n_{01}, \text{cm}^{-1}$	$v_{01}$
$\lambda_1$	–0,002672414	$v_{01} = \frac{n_{01\lambda_0}}{n_{01\lambda_1} - n_{02\lambda_2}} = 12,16$
$\lambda_0$	–0,002517241	
$\lambda_2$	–0,002465517	

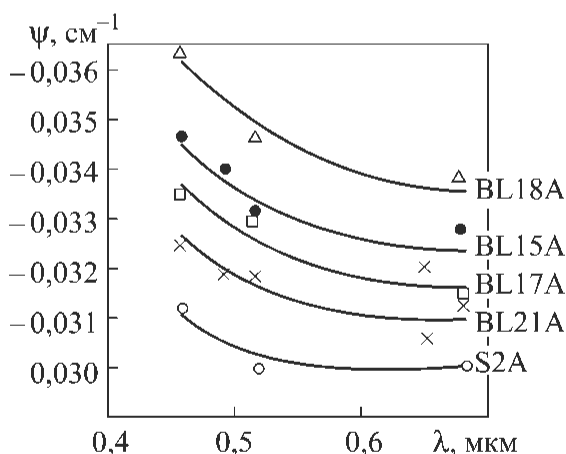




**Рис. 2.5.** Графики дисперсионной зависимости показателя преломления от толщины образца стекла BL15

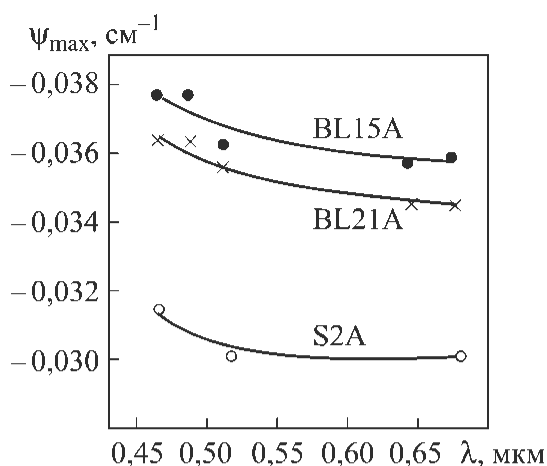
На рис. 2.5 для образца BL15 показаны спектральные кривые РПП как функции толщины.

На рис. 2.6 для образцов BL15A, BL17A, BL18A, BL21A и S2A изображены спектральные функции наклона распределения показателя преломления, полученные с помощью полиномиальной регрессии, из которых следует наличие значительной дисперсии ГрОСр. Погрешность составила 1 %.



**Рис. 2.6.** Спектральные функции наклона РПП при ее полиномиальном представлении для разных образцов стекол

Спектральные функции РПП в случае гауссовой регрессии представлены на рис. 2.7, а результаты их анализа в диапазоне градиентной зоны 1,1...1,4 мм — в табл. 2.11, где  $n$  — ПП базового стекла.



**Рис. 2.7.** Спектральные функции РПП при гауссовом представлении для разных образцов стекол

Таблица 2.11

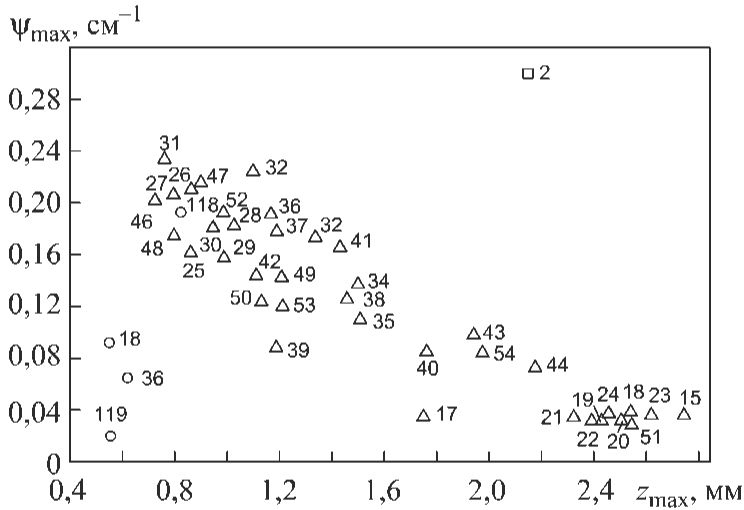
**Результаты анализа спектральной функции РПП (по рис. 2.7)**

λ, мкм	Характеристики для образцов разных марок стекла					
	n		n <sub>01</sub> , см <sup>-1</sup>		Ψ <sub>max</sub> , см <sup>-1</sup>	
	BL15A	BL21A	BL15A	BL21A	BL15A	BL21A
0,4579	1,5112	1,5112	-0,03518	-0,03243	-0,0376	-0,03643
0,4808	1,5084	1,5084	-0,03395	-0,03181	-0,0376	-0,03633
0,5145	1,5066	1,5066	-0,03299	-0,03200	-0,0362	-0,03555
0,6471	1,5001	1,5001	-0,03190	-0,03054	-0,0357	-0,03449
0,6764	1,4993	1,4993	-0,03295	-0,03118	-0,0358	-0,03487
Примечание. Ψ <sub>max</sub> — как показано раньше — максимальный наклон гауссовой кривой						

Приведенные в табл. 2.11 наклон гауссовых кривых  $\psi_{\max}$  и коэффициенты  $n_{01}$  для линейного полиномиального приближения являются главными дисперсионными характеристиками градиентных сред с ОРПП. Из рис. 2.6, 2.7 следует, что спектральные функции РПП для рассмотренных регрессий имеют схожую конфигурацию. Хроматические изменения коэффициента  $n_{01}$  и наклона РПП соответственно

для полиномиального и гауссова представлений составляют (6...10) % и 5 % от аналогичных значений для основной длины волны. Указанные изменения имеют определяющее значение для ахроматизации ОС. Чтобы исправить сферохроматическую aberrацию, используют два параметра — дисперсию показателя преломления базового стекла и дисперсию градиента ПП. Эти параметры могут быть противоположны по знаку, что позволяет в одиночной градиентной линзе получать меньшую сферохроматическую aberrацию по сравнению с исходной однородной линзой.

На рис. 2.8 представлена диаграмма с характеристиками перспективных ГрОСр, которые могут изготовить фирмы Bausch&Lomb, Schott Optical, University of Rochester. Важнейшими характеристиками являются максимальный наклон РПП  $\psi_{\max}$  и его расположение относительно первой поверхности пластины ( $z_{\psi_{\max}}$ ).



**Рис. 2.8.** Характеристики перспективных градиентных сред различных фирм:  
 $\Delta$  — Bausch&Lomb;  $\square$  Schott Optical;  
 $\circ$  — Рочестерский университет

Итак, измерения показали, что регрессии на полином и гауссову кривую хорошо соответствуют друг другу. Подходящий наилучшим образом полином имеет 1-, 2- и 4-ю степени ряда и максимальное отклонение от экспериментальных точек не более 2 %. Для гауссовой кривой максимальное отклонение от экспериментальных точек составило 0,3 %.

## 2.3. Обзор характеристик известных градиентных оптических элементов

Применение ГрОЭ при создании новых систем связано с разработкой целого комплекса новейших технологий и целесообразно в ОС, где использование традиционных однородных сред и технологий не обеспечивает необходимые требования. В первую очередь это относится к микрооптическим линзовым элементам и макрооптическим системам, предназначенным для работы в ИК-диапазоне.

**Коллимационные линзы с ОРПП малых и средних диаметров.** В этом разделе приводятся взятые из патентной литературы характеристики ГрОСр, конструктивные данные, числовые апертуры  $NA$  и фокусные расстояния  $f$  линз. Применены следующие обозначения:  $R_1, R_2$  — радиусы кривизны поверхностей;  $d$  — толщина линзы по оси;  $D$  — световой диаметр линзы. Параметры РПП различных образцов приведены в табл. 2.12.

Таблица 2.12

**Параметры РПП для разных образцов линз**

Номер образца	Диапазон по координате $z$ , мм	Зависимость $n(z)$
1	0—0,4 0,4—2,0	$1,556-0,138z-0,00513z^2$ 1,50
2	0—0,4 0,4—1,6 1,6—2,0	$1,650-0,124z$ 1,60 $1,6+0,124(z-1,6)$
3	0—0,15 0,152,0	$1,608-0,0514z$ 1,60
4	0,4—2,0 2,0—2,4	$1,687-0,0297z$ 1,675
5	0—1,0 1,0—3,0	$1,631-0,0309z$ 1,60
6	0—0,5 0,5—1,5	$1,68-0,034538z$ 1,663
7	0—0,5 0,5—1,0 1,0—1,5	$1,635-0,041z+0,040z^2$ 1,624 $1,624+0,021(z-1,0)$

Номер образца	Диапазон по координате $z$ , мм	Зависимость $n(z)$
8	0–1,0 1,0–2,0	$1,66-0,034z$ $1,625+0,034(z-1)$
9	0–0,5 0,5–1,0 1,0–1,5	$1,627-0,041z$ 1,606 $1,606+0,041(z-1)$
10	0–1,6 1,6–5,1	$1,765-0,0573z$ 1,675
11	0–0,6 0,6–2,2	$1,583-0,135z+0,0055z^2$ 1,5
12	0–2,7 2,7–9,2 9,2–11,9	$1,684-0,0314z$ 1,6 $1,6+0,0314(z-9,2)$

В табл. 2.13 показаны конструктивные характеристики образцов линз.

Таблица 2.13

### Конструктивные характеристики различных образцов линз

Номер образца	$R_1$ , мм	$R_2$ , мм	$d$ , мм	$D$ , мм	$NA$	$f$ , мм
1	3,23	–13,76	2,0	3,0	0,30	5,0
2	3,42	–50,85	2,0	3,0	0,30	5,0
3	7,56	–181,40	2,0	2,4	0,10	12,0
4	13,19	303,66	2,0	6,0	0,15	20,0
5	12,82	–694,13	3,0	10,0	0,25	20,0
6	11,56	$\infty$	1,5	4,76	0,14	17,0
7	10,80	$\infty$	1,5	5,0	0,16	17,0
8	11,88	$\infty$	2,0	5,4	0,15	18,0
9	9,40	$\infty$	1,5	5,7	0,19	15,0
10	7,42	149,8	5,1	9,0	0,45	10,0

Номер образца	$R_1$ , мм	$R_2$ , мм	$d$ , мм	$D$ , мм	$NA$	$f$ , мм
11	3,33	−14,92	2,2	3,5	0,35	5,0
12	14,60	−137,0	11,9	16,0	0,40	20,0

Аберрации в центре поля изображения для различных образцов линз представлены в табл. 2.14:  $\Delta s'_{\text{сф. max}}$  — максимальная сферическая аберрация;  $\Delta y'_k$  — кома.

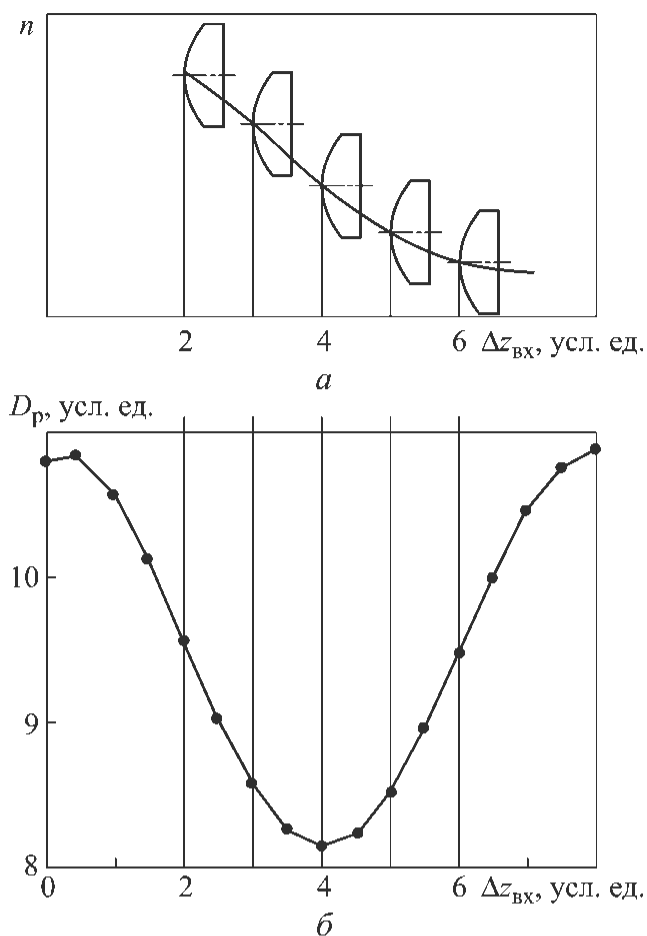
Таблица 2.14

## Значения аберраций различных образцов линз

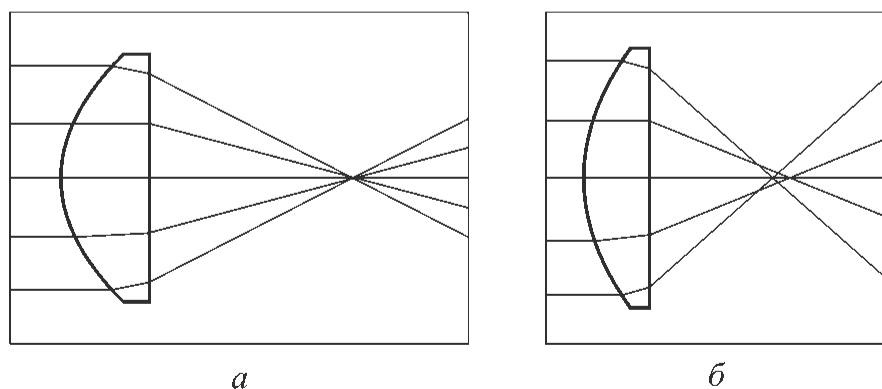
Номер образца	$\Delta s'_{\text{сф. max}}$ , мкм	$\Delta y'_k$ , мкм
1	0,3	0,4
2	0,7	1,5
3	0,1	0,3
4	0,1	0,8
5	0,6	4,0
6	0,3	0,4
7	0,7	1,5
8	0,1	0,3
9	0,1	0,8
10	2,0	8,0
11	1,0	1,0
12	10,0	10,0

На рис. 2.9 изображены типичный профиль осевого РПП (*а*) и зависимость диаметра пятна рассеивания  $D_p$  (*б*) от положения первой поверхности линзы, которое задается смещением  $\Delta z_{\text{вх}}$  от входной поверхности заготовки с ОРПП. Из рис. 2.9 следует, что минимальное пятно рассеивания соответствует самому крутому участку графика РПП ( $\Delta z_{\text{вх}} = 4$ ).

**Линзы GRADIUM с осевым распределением показателя преломления.** Достоинством GRADIUM-линз с ОРПП (как и ОС, имеющих асферические элементы) является возможность получения высокого качества изображения: меньшее пятно рассеивания, низкая дистор-



**Рис. 2.9.** Типичный профиль РПП (а) и зависимость диаметра пятна рассеивания  $D_p$  светового пучка от положения первой поверхности линзы  $\Delta z_{\text{вх}}$  (б)



**Рис. 2.10.** Сферическая абберация линз GRADIUM (а) и однородной (б)

сия, способность взаимодействовать с высокими мощностями излучения. На рис. 2.10 для сравнения изображены сферические aberrации двух линз — однородной и GRADIUM.

В результате дисперсии градиента ПП в одиночной линзе появляется дополнительный параметр для улучшения коррекции хроматизма, что приближает коррекционные возможности ГрОЭ к линзовому дублету из однородных линз. Как известно, недостатком однородных сферических линз является сферическая aberrация, определяющая размеры светового пятна. Рассмотрим технические характеристики освоенных для промышленного производства градиентных линз.

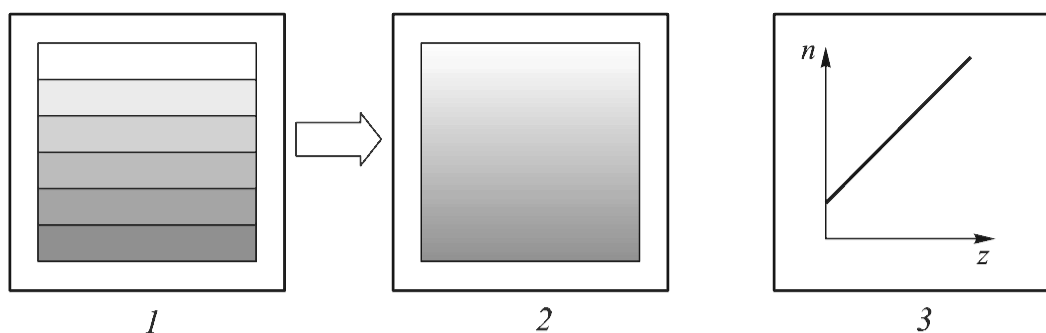
**Основные технические характеристики GRADIUM-линз:**

Расчетная длина волны .....	546 нм
Температурный диапазон:	
при эксплуатации .....	(-20... +200) °C
во время хранения .....	(-40 ...+300) °C
Допуск:	
на наружный диаметр .....	±0,250 мм
на центральную толщину .....	±0,100 мм
на эквивалентное фокусное расстояние и рабочую дистанцию для серий	
GAD .....	±2 %
GPX, GBX, GMN .....	±1 %
Требования качества поверхности .....	40/20 царапин/выколок

На рис. 2.11 схематично показаны этапы технологического процесса получения заготовки стекла с ОРПП (типа GRADIUM). Процесс состоит из укладывания множества тонких однородных стеклянных пластинок с постепенно увеличивающимися показателями преломления (*I*) и далее при нагреве материала получения плавного градиента ПП (2) от основания до вершины. Показатель преломления и дисперсию подбирают с помощью изменения толщины и оптических свойств составляющих стеклянных пластинок и параметров диффузионного процесса. В результате появляется определенная зависимость ПП по толщине материала (3).

Изготавливают следующие типы GRADIUM-линз: плосковыпуклая (GPX); двояковыпуклая (GBX); менискообразная (GMN) — градиент в области выпуклой поверхности; ахроматический выпуклый дублет (GAD). Характеристики некоторых линз, применяемых в изделиях стандартных и на заказ, представлены в табл. 2.15, где *K* обозначает диафрагменное число; *d* — толщину по центру; *s'F'* — задний фокальный отрезок; *D*<sub>п</sub> — полный диаметр.





**Рис. 2.11.** Схема технологического процесса получения стекла GRADIUM:  
1 — специальная раскладка тонких стекол; 2 — нагревание; 3 — профиль изменения ПП в результате диффузии

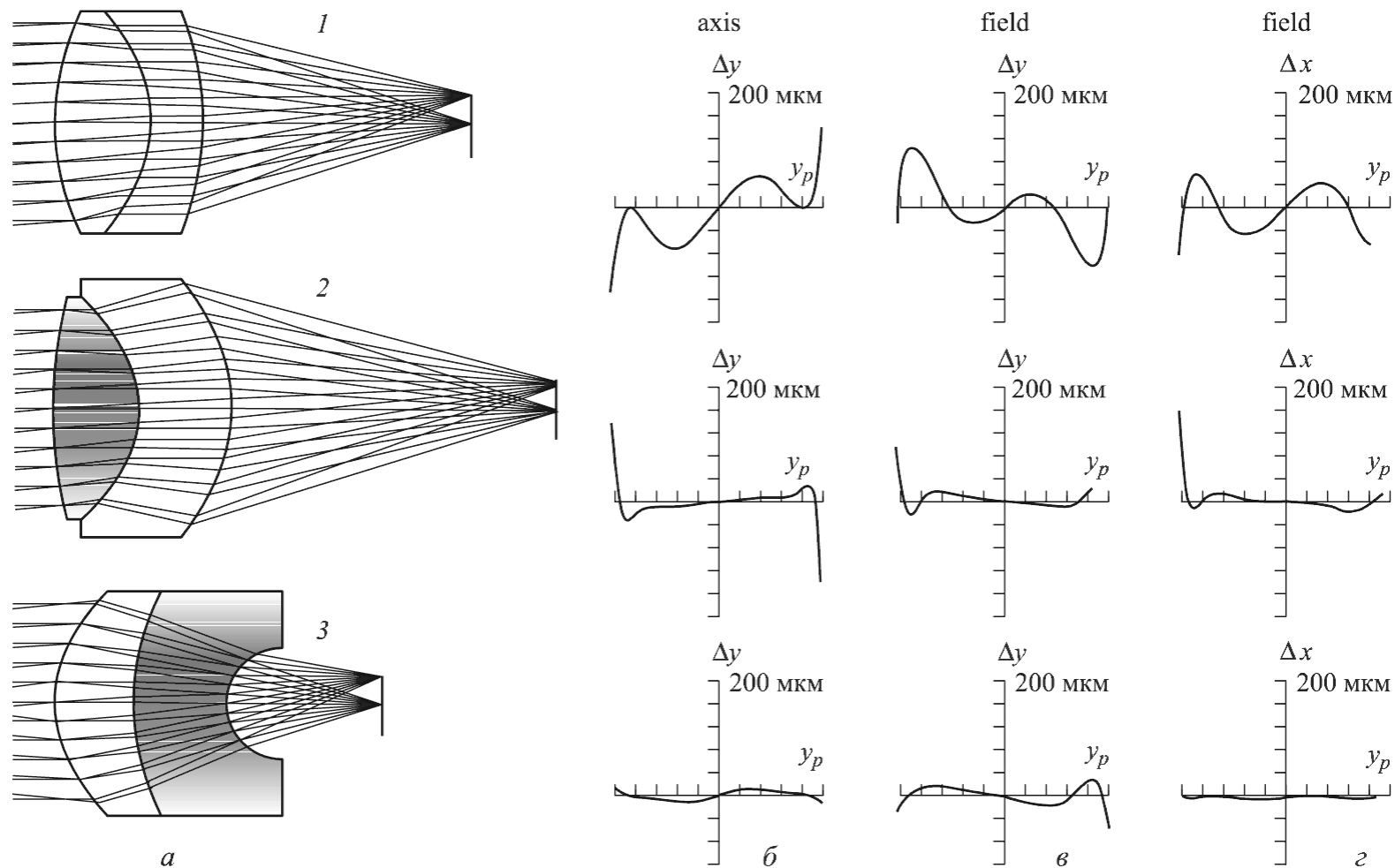
Таблица 2.15

### Габаритные характеристики GRADIUM-линз

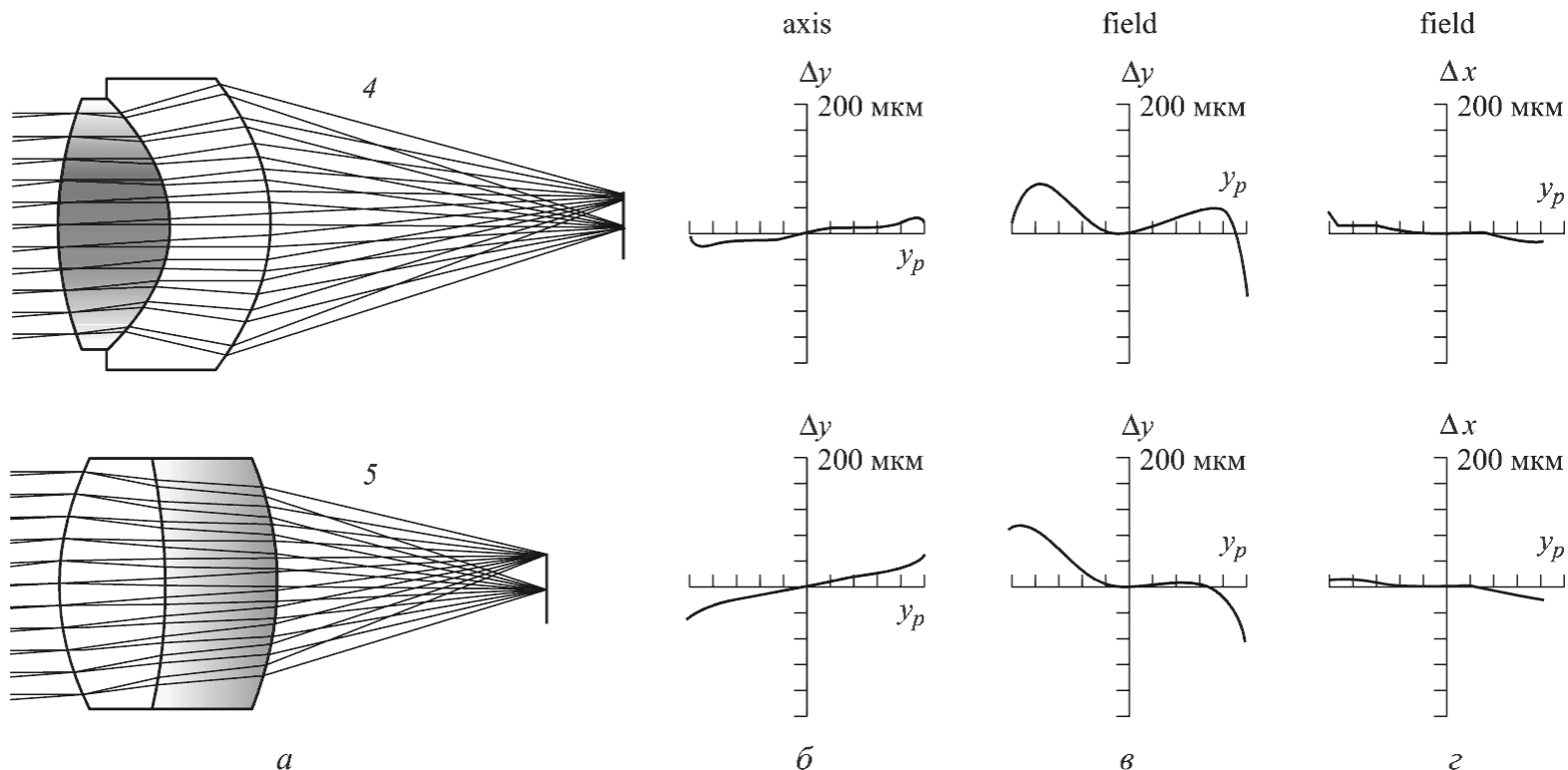
Марка линзы	$D_{\text{п}}, \text{ мм}$	$D, \text{ мм}$	$K$	$f, \text{ мм}$	$d, \text{ мм}$	$s'_{F'}, \text{ мм}$
Стандартные изделия						
GPX-5-5	5	4	1,0	5	2,9	3,09
GPX-5-12,5	5	4	2,8	12,5	2,0	11,30
GPX-10-10	10	9	1,1	10	3,0	8,00
GPX-10-18	»	»	2,0	18	2,5	16,52
GPX-10-22	»	»	2,5	22	»	20,54
GPX-10-25	»	»	2,8	25	»	23,55
GPX-10-30	»	»	3,3	30	»	28,53
GPX-10-40	»	»	4,5	40	2,0	38,84
GPX-15-15	15	13	1,1	15	4,2	12,24
GPX-15-40	15	13	3	40	2,0	38,83
GPX-20-50	20	18	2,8	50	3,0	48,24
GPX-25-60	25	22	2,6	60	6,0	56,46
GPX-25-80	25	22	3,5	80	4,0	77,69
GPX-30-60	30	27	2,2	60	6,0	56,44
GPX-30-70	»	»	2,6	70	6,0	66,47

Марка линзы	$D_{\text{п}}$ , мм	$D$ , мм	$K$	$f$ , мм	$d$ , мм	$s'_{f'}$ , мм
GPX-30-80	»	»	3,0	80	4,0	77,68
GPX-30-100	»	»	3,7	100	6,0	96,53
GPX-40-80	40	36	2,2	80	6,0	76,47
GPX-50-100	50	45	2,2	100	8,0	94,90
GPX-50-120	»	»	2,7	120	8,0	114,33
GPX-50-125	»	»	2,8	125	»	120,37
GPX-50-150	»	»	3,3	150	»	145,25
GPX-50-160	»	»	3,6	160	»	155,25
GPX-50-200	»	»	4,5	200	»	195,27
GPX-80-125	80	72	1,7	125	12,25	116,91
Изделия на заказ						
GBX-25-40	25	22	1,8	40	4,6	37,51
GBX-30-40	30	27	1,5	40	5,76	36,72
GBX-50-80	50	45	1,8	80	8,0	75,46
GPX-40-100	40	36	2,8	100	6,0	96,56
GPX-40-125	»	36	3,5	125	6,0	121,52
GPX-40-150	»	36	4,2	150	6,0	146,49
GAD-5-15	5	4	3,3	15	4,0	13,07
GAD-10-20	10	9	2,2	20	6,0	17,17
GAD-25-50	25	22	2,2	50	11,0	44,37
GMN-30-50	30	27	1,9	50	5,0	46,82

Из табл. 2.15 следует, что у стандартных плосковыпуклых GRADIUM-линз диаметры находятся в диапазоне от 5 до 72 мм,  $f' = 5...160$  мм, относительные отверстия  $1:K = 1:1...1:4$  (в среднем,  $1:2.5...1:3$ ), толщина  $d$  составляет 2...12,25 мм. Линзы, изготавливаемые по специальным требованиям, бывают двояковыпуклой и плосковыпуклой конфигурации поверхностей, а также могут иметь повышенное исправление хроматических аберраций (тип Achromat).

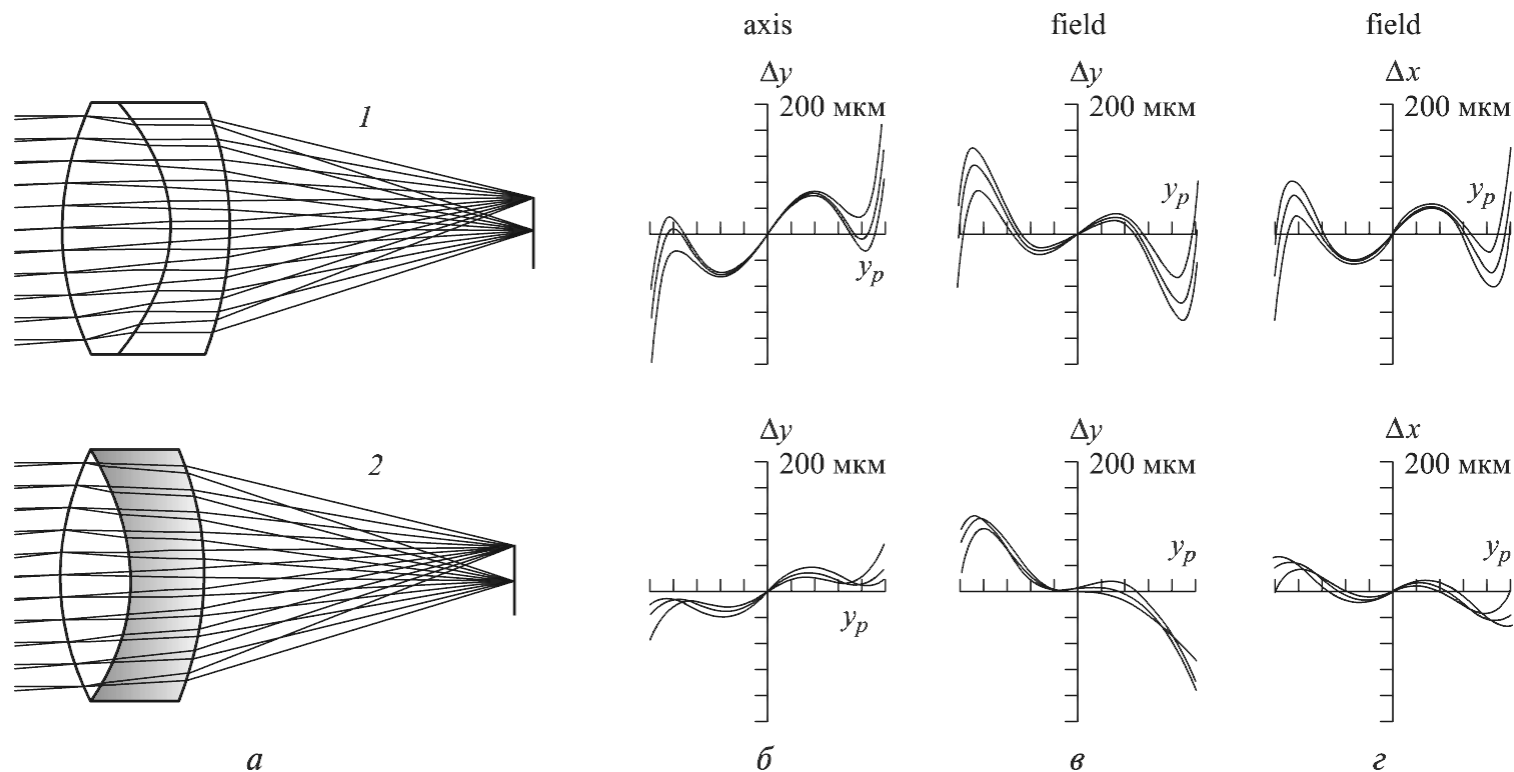


**Рис. 2.12 (начало).** Конструкция дублетов (а) и графики aberrаций (б—г) широких пучков лучей с РРПП и ОРПП в первой или второй линзах дублета:



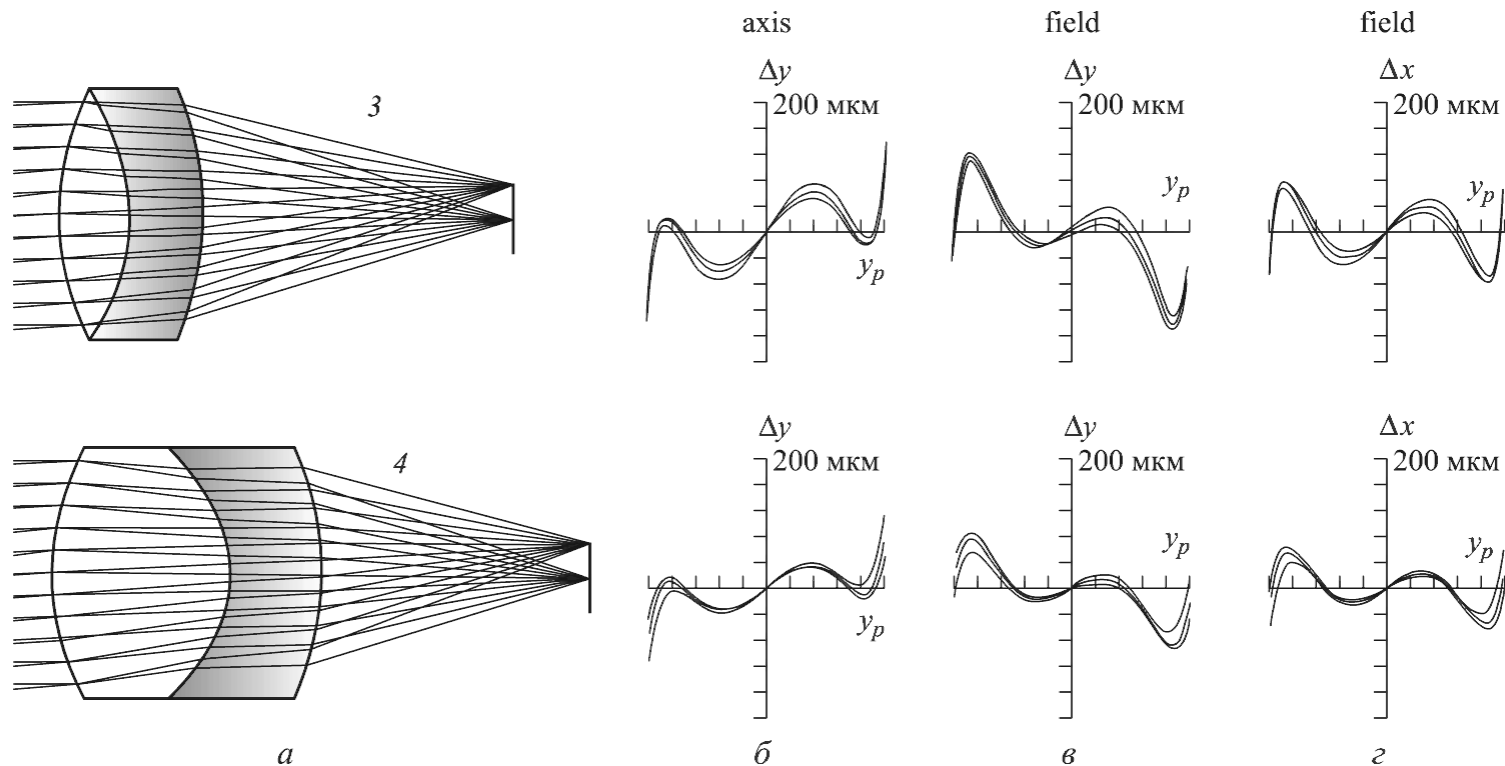
**Рис. 2.12 (окончание).** Конструкция дублетов (а) и графики aberrаций (б—г) широких пучков лучей с РРПП и ОРПП в первой или второй линзах дублета:

4, 5 — блоки с ОРПП в первой и второй линзах соответственно; б — для осевого пучка лучей; в, г — соответственно меридиональное и сагитальное сечения внеосевого пучка; линза с ГрОЭ окрашена темным фоном



**Рис. 2.13 (начало).** Конструкция дублетов с градиентным элементом в качестве второй линзы (а) и графики (см. рис. 2.12) aberrаций (б—г):

1 — исходный блок из однородных линз; 2 — с использованием градиентных элементов GF41SFN



**Рис. 2.13 (окончание).** Конструкция дублетов с градиентным элементом в качестве второй линзы (а) и графики (см. рис. 2.12) aberrаций (б—г):  
3—4 — с использованием градиентных элементов GF41SFP, GF51SFN соответственно

**Дублеты с ОРПП или РРПП в одной из линз.** На рис. 2.12 приведены графики aberrаций широких наклонных пучков лучей у конструкций блоков линз, одна из которых имеет градиентный ПП. По графикам можно сделать вывод, что введение градиента существенно уменьшает поперечные aberrации для осевой и внеосевой точек предмета.

На рис. 2.13 показаны графики aberrаций широких полихроматических пучков линзовых дублетов, в которых вторая линза изготовлена из среды GRADIUM, что позволяет улучшать коррекцию хроматических aberrаций.

### **Вопросы для самопроверки**

1. Назовите основные технологии получения неоднородных оптических сред.
2. Перечислите основные технологические параметры ГрОС.
3. Поясните особенности описания РПП элементов *Selfoc*, GRADIUM.
4. В чем заключается регрессивный анализ функции РПП градиентной среды?

### 3. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ГРАДИЕНТНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ПАРАКСИАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ. ГАУССОВЫ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Расчет параксиальных характеристик — важнейшая процедура при проектировании ОС. К таким характеристикам относятся фокусные расстояния ( $f'$ ,  $f$ ), фокальные отрезки ГрОЭ ( $s_F$ ,  $s'_F$ ), положение главных плоскостей ( $s_H$ ,  $s'_H$ ), линейное увеличение ( $\beta_0$ ) и задний отрезок ( $s'$ ) при положении предмета на конечном расстоянии, а также хроматические aberrации 1-го порядка в случае, если система предназначена для работы в конечном спектральном диапазоне.

#### 3.1. Расчет параксиальных лучей в градиентных средах

Аналитические методы анализа и синтеза ГрОС построены на формулах теории aberrаций 3-го порядка и хроматизма 1-го порядка, базирующейся на параметрах первого и второго вспомогательных лучей.

В общем случае распределение осесимметричного показателя преломления  $n(x, y, z)$  в меридиональной плоскости  $OYZ$  задают в виде рядов (1.18), (1.19):

$$n(z, y) = n_0(z) + n_1(z)y^2 + n_2(z)y^4;$$

$$n_0(z) = n_{00} + n_{01}z + n_{02}z^2;$$

$$n_1(z) = n_{10} + n_{11}z + n_{12}z^2;$$

$$n_2(z) = n_{20} + n_{21}z + n_{22}z^2.$$

Для ОРПП и РРПП имеем соответственно

$$n(z) = n_{00} + n_{01}z + n_{02}z^2 + n_{03}z^3 + \dots;$$



$$n(y) = n_{00} + n_{10}y^2 + n_{20}y^4 + n_{30}y^6 + \dots,$$

где  $n_{ij}$  — коэффициенты.

Часто, с целью удобства описания ОРПП, в (1.19) переходят от обозначения  $n_{00}$  к  $n_0$  ( $n_{00} \rightarrow n_0$ ).

**Исходные положения расчета параметров траекторий параксиальных лучей в ГроЭ.** Обычно градиентная зона занимает определенную часть объема оптической среды. Траектория луча складывается из участка от предметной точки до точки встречи с входной поверхностью линзы, участков прохождения луча по градиентной и однородной средам (или наоборот), а также после преломления на выходной поверхности линзы.

Для всех типов РПП угол луча после преломления его на входной поверхности равен углу на входе в градиентную среду ( $\alpha' = \alpha_2$ ):

$$\alpha' = \frac{h\rho(n' - n) + \alpha n}{n'}, \quad (3.1)$$

где  $n$ ,  $\alpha$  и  $n'$ ,  $\alpha'$  — значения ПП и угла осевого луча до и после поверхности преломления соответственно;  $\rho$  — кривизна поверхности.

При расположении градиентной линзы в воздухе, согласно (3.1), имеем

$$\alpha_2 = \frac{h_1 \rho_1 (n_0 - 1) + \alpha_1}{n_0},$$

где  $n_0$  — значение ПП на оптической оси при входе луча в ГроЭ.

Угол после преломления луча на выходной поверхности

$$\alpha_3 = h_2 \rho_2 (1 - n_z) + \bar{\alpha}_2 n_z,$$

где  $n_z$ ,  $\bar{\alpha}_2$  — значение ПП и угол на выходе из неоднородной среды соответственно; для РРПП  $n_z = n_{00}$ .

Фокусное расстояние  $f'$ , заднее вершинное фокусное расстояние  $s'_{F'}$ , а также линейное увеличение  $\beta_0$  и задний отрезок  $s'$  вычисляют по формулам

$$f' = h_1 / \alpha_3; \quad s'_{F'}(s') = h_2 / \alpha_3; \quad \beta_0 = \alpha_1 / \alpha_3.$$

Для упрощения расчетов и проверки результатов часто применяют нормировку исходных значений углов и высот первого и второго вспомогательных лучей, позволяющую получить угол в пространстве изображений  $\alpha'_p = 1$ :

$$h_1 = f', \quad \beta_1 = 1, \quad y_1 = s_{\text{вх}} \quad \text{при } s = -\infty;$$

$$\alpha_1 = \beta_0, \quad h_1 = \alpha_1 s, \quad \beta_1 = 1, \quad y_1 = s_{\text{вх}} \quad \text{при } s \neq -\infty,$$

где  $s, s_{\text{вх}}$  — отрезки, определяющие положение предмета и входного зрачка.

**Способы описания РПП градиентных сред. Расчет траектории параксиального луча в среде с РПП.** При моделировании ОС с элементами, имеющими РПП, функция показателя преломления описывается полиномами первой  $n(y)$  или второй  $n^2(y)$  степени — см. (1.21), (1.24). В зависимости от знака коэффициента  $n_{10}$  в (1.21) различают два типа РПП: фокусирующее ( $n_{10} < 0$ ) или рассеивающее ( $n_{10} > 0$ ).

Выразив коэффициенты  $n_{j0}$  из (1.20), (1.21) через  $h_{2i}$  (1.24), получим связывающие их выражения:

$$\begin{aligned} n_{10} &= -\frac{1}{2}g^2n_{00}; \\ n_{20} &= \frac{n_{00}}{2}\left(h_4 - \frac{1}{4}\right)g^4; \\ n_{30} &= \frac{n_{00}}{2}\left(h_6 + \frac{h_4}{2} - \frac{1}{8}\right)g^6; \\ n_{40} &= \frac{n_{00}}{2}\left[h_8 + \frac{h_6}{2} - \frac{h_4}{8}(3 - 2h_4) - \frac{5}{64}\right]g^8. \end{aligned} \tag{3.2}$$

При фокусирующем РПП в системе координат, привязанной к первой поверхности линзы, текущие углы и высоты первого и второго вспомогательных (параксиальных) лучей на расстоянии  $z$  от поверхности вычисляют по формулам

$$\begin{aligned} \bar{h}_2 &= h(z) = h(0)\cos(tz) - \frac{\alpha(0)}{t}\sin(tz), \\ \bar{\alpha}_2 &= \alpha(z) = \alpha(0)\cos(tz) + h(0)t\sin(tz); \\ \bar{y}_2 &= y(z) = y(0)\cos(tz) - \frac{\beta(0)}{t}\sin(tz), \\ \bar{\beta}_2 &= \beta(z) = \beta(0)\cos(tz) + y(0)\sin(tz), \end{aligned} \tag{3.3}$$

где  $h(0), y(0), h(z=d), y(z=d)$  и  $\alpha(0), \alpha(z=d), \beta(0), \beta(z=d)$  — высоты и углы параксиальных лучей соответственно на входе и выходе из неоднородной среды;  $t$  — фокусирующая константа или константа

$$\text{РПП, } t = \sqrt{\frac{2|n_{10}|}{n_{00}}}.$$

При рассеивающем РПП имеем

$$\begin{aligned}\bar{h}_2 &= h(0) \cosh(tz) - \frac{\alpha(0)}{t} \sinh(tz), \\ \bar{\alpha}_2 &= \alpha(0) \cosh(tz) - h(0)t \sinh(tz); \\ \bar{y}_2 &= y(0) \cosh(tz) - \frac{\beta(0)}{t} \sinh(tz), \\ \bar{\beta}_2 &= \beta(0) \cosh(tz) - y(0)t \sinh(tz).\end{aligned}\tag{3.4}$$

Значение  $t$  определяется по той же формуле, что и для фокусирующего РПП.

**Фокусное расстояние, фокальные отрезки и масштабирование параметров линзы с РПП.** Чтобы найти аналитические выражения для фокусного расстояния, заднего и переднего фокальных отрезков линзы в воздухе, воспользуемся формулами (3.3), (3.4). Так при  $n_{10} < 0$ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{f'} &= (n_{00} - 1)(\rho_1 - \rho_2) \cos(td) + \frac{\rho_1 \rho_2 (n_{00} - 1)^2}{n_{00} t} \sin(td) + n_{00} t \sin(td); \\ s'_{F'} &= f' \left[ \cos(td) - \rho_1 \frac{(n_{00} - 1)}{n_{00}} \sin(td) \right]; \\ s_F &= -f' \left[ \cos(td) + \rho_2 \frac{(n_{00} - 1)}{n_{00}} \sin(td) \right].\end{aligned}\tag{3.5}$$

В случае тонкой линзы выражение (3.5) для оптической силы будет таким:

$$\Phi = \frac{1}{f'} = (n_{00} - 1)(\rho_1 - \rho_2) - 2n_{10}d = \Phi_{\text{од}} + \Phi_{\text{гр}},\tag{3.6}$$

где  $\Phi_{\text{од}}$ ,  $\Phi_{\text{гр}}$  — оптические силы сред — однородной и обусловленной наличием градиента ПП,  $\Phi_{\text{гр}} = -2n_{10}d$ .

Из (3.6) следует, что у тонкой однородной линзы с РПП оптическая сила складывается из двух составляющих:  $\Phi_{\text{од}}$  однородной линзы и  $\Phi_{\text{гр}}$  плоскопараллельной пластины с РПП, одинаковой с линзой толщины (линзы Вуда).

Если  $n_{10} > 0$ , то

$$\frac{1}{f'} = (n_{00} - 1)(\rho_1 - \rho_2) \cosh(td) + \frac{\rho_1 \rho_2 (n_{00} - 1)^2}{n_{00} t} \sinh(td) - tn_{00} \sinh(td).$$

Из анализа (3.5) получим правило пересчета параметров линзы на заданное (новое) фокусное расстояние  $f'_h$  с коэффициентом масштабирования  $k = f'_h / f'$ :

$$\frac{1}{f'_h} = (n_{00} - 1)(\rho_{1h} - \rho_{2h}) \cos(t_h d_h) + \frac{\rho_{1h} \rho_{2h} (n_{00} - 1)^2}{n_{00} t_h} \sin(t_h d_h) + n_{00} t_h \sin t_h d_h,$$

где индекс «н» относится к новым значениям;  $\rho_{1h} = \rho_1 / k$ ;  $\rho_{2h} = \rho_2 / k$ ;  $d_{2h} = d_2 k$ ;  $t_h = t / k$ .

Итак, чтобы пересчитать параметры линзы на новое фокусное расстояние, нужно значения радиусов кривизны поверхности и толщины умножить, а константы  $t$  поделить на коэффициент масштабирования  $k$ . Новые коэффициенты определяют по формулам

$$n_{10h} = \frac{n_{10}}{k^2}, \quad n_{20h} = \frac{n_{20}}{k^4}.$$

**Расчет траекторий параксиальных лучей в ГрОЭ. Фокусное расстояние линзы с ОРПП и масштабирование ее параметров.** Формулы углов и высот для указанного распределения в общем случае, задаваемом (1.20), имеют вид

$$h(z) = h_1 - \alpha(0) n_0 \int_0^z \frac{dz}{n(z)}; \quad \alpha(z) = \frac{\alpha(0) n_0}{n_z}, \quad (3.7)$$

где  $n_0$ ,  $n_z$  — показатели преломления на входе и выходе луча из ГрОСр. Для частного случая линейного ОРПП при  $n_{02} = n_{03} = n_{04} \dots = 0$ :

$$h(z) = h_1 - \frac{\alpha(0) n_0}{n_{01}} \ln \frac{n_z}{n_0}; \quad \alpha(z) = \frac{\alpha(0) n_0}{n_z}.$$

Используя (3.1), (3.7), находим выражение для фокусного расстояния и фокальных отрезков:

$$\frac{1}{f'} = \rho_1 (n_0 - 1) - \rho_2 (n_z - 1) + \rho_1 \rho_2 (n_0 - 1) (n_z - 1) \int_0^z \frac{1}{n(z)} dz;$$

$$\begin{aligned} s'_{F'} &= f' \left[ 1 - \rho_1 (n_0 - 1) \int_0^d \frac{dz}{n(z)} \right]; \\ s_F &= -f' \left[ 1 + \rho_2 (n_0 - 1) \int_0^d \frac{dz}{n(z)} \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

С помощью (3.8) выполняют нормировку исходного фокусного расстояния к заданному. Результирующая формула имеет вид

$$\frac{1}{f'} = \rho_{1н} (n_0 - 1) - \rho_{2н} (n_z - 1) + \rho_{1н} \rho_{2н} (n_0 - 1) (n_z - 1) \int_0^{d_n} \frac{1}{n(z)} dz,$$

где  $\rho_{1н}, \rho_{2н}, d_n$  — новые значения кривизны поверхностей линзы и толщины.

При масштабировании значения радиусов кривизны поверхностей и толщины линзы умножаются на коэффициент пересчета  $k$ , верхний предел интеграла заменяется на  $d_n = k d$ , а новые значения

коэффициентов определяют из формул  $n_{01н} = \frac{n_{01}}{k}$ ,  $n_{02н} = \frac{n_{02}}{k^2}$ , ...

При наличии градиентного ПП в некоторой зоне оптической среды линзы правило масштабирования ее параметров сохраняется.

**Расчет траектории параксиальных лучей в ГрОЭ с СРПП.** Рассмотрим траекторию луча в линзе, у которой в области оптической среды, прилегающей к первой поверхности, присутствует линейный тип СРПП, описываемый в сферической системе координат формулой (1.22):

$$n(R - \rho) = n_{\rho 0} + n_{\rho 1} (R - \rho),$$

где  $R$  — технологический радиус формирования СРПП;  $n_{\rho 0}$  — показатель преломления в центре сферической системы координат;  $n_{\rho 1}$  — линейный коэффициент в функции СРПП.

Для перехода из сферической в декартову систему координат формулу (1.22) раскладывают в бесконечный ряд, а количество членов разложения выбирают из анализа точности расчета параметров луча. Рассматриваемый переход к декартовой системе координат, связанной с первой поверхностью линзы, осуществляют по формулам (1.23):

$$\begin{aligned} n_{00} &= n_{\rho 0}; \quad n_{01} = n_{\rho 1}; \quad n_{10} = -n_{\rho 1} \frac{1}{2R}; \quad n_{11} = n_{\rho 1} \frac{1}{2R^2}; \quad n_{20} = n_{\rho 1} \frac{1}{8R^3}; \\ n_{21} &= n_{\rho 1} \frac{3}{8R^4}. \end{aligned}$$

Значение ПП на оси перед преломлением на выходной поверхности рассчитывают из уравнения  $n_z = n_{00} + n_{01} d_{\text{гп}}$ , где  $d_{\text{гп}}$  — толщина градиентной зоны.

В меридиональной плоскости функция ПП определяется полиномом, коэффициенты которого вычисляют по (1.23):

$$n(z, y) = n_0(z) + n_1(z)y^2 + n_2(z)y^4,$$

где  $n_0(z) = n_{00} + n_{01}z$ ;  $n_1(z) = n_{10} + n_{11}z$ ;  $n_2(z) = n_{20} + n_{21}z$ .

Высоту луча  $\bar{h}_2$  и угол  $\bar{\alpha}_2$  на выходе из ГрОСр находят с помощью полиномов:

$$\begin{aligned}\bar{h}_2 &= A_0 + A_1 d + A_2 d^2 + A_3 d^3 + A_4 d^4 + A_5 d^5; \\ \bar{\alpha}_2 &= -(A_1 + 2A_2 d + 3A_3 d^2 + 4A_4 d^3 + 5A_5 d^4).\end{aligned}\tag{3.9}$$

В (3.9) для луча на входе в градиентную среду получаем  $A_0 = h_1 A_1 = -\alpha_2$ . Коэффициенты  $A_k$ , стоящие при  $d^i$ , определяют высоту осевого луча и угол его наклона с оптической осью, их рассчитывают так:

$$\begin{aligned}A_2 &= \frac{2A_0 N_{10} - A_1 N_{01}}{2N_{00}}; \\ A_3 &= \frac{2A_1 N_{10} + 2A_0 N_{11} - 2A_2 N_{01}}{6N_{00}}; \\ A_4 &= \frac{2A_2 N_{10} - 2A_1 N_{11} - 9A_3 N_{01}}{12N_{00}}; \\ A_5 &= \frac{A_3 N_{10} - A_2 N_{11} - 8A_4 N_{01}}{10N_{00}}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

После преломления луча на выходной поверхности, согласно (3.1):

$$\alpha_3 = h_2 \rho_2 (1 - n_z) + \bar{\alpha}_2 n_z.$$

Фокусное расстояние и задний фокальный отрезок вычисляют, как и у однородных ОС:  $f' = h_1 / \alpha_3$  и  $s'_F = h_2 / \alpha_3$ ; высоту и угол с осью второго вспомогательного луча рассчитывают по формулам (3.9), (3.10), заменив коэффициент  $A_k$  на  $B_k$ :

$$\begin{aligned}y(d) &= \sum_0^{\infty} B_n d^n = B_0 + B_1 d + B_2 d^2 + \dots; \\ \beta(d) &= \sum_0^{\infty} B_n d^n = B_0 + B_1 d + B_2 d^2 + \dots.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Начальные данные для расчета второго вспомогательного луча при  $y_1 = s_p$ ,  $\beta_1 = 1$ :  $B_0 = y_1$ ;  $B_1 = -\beta_2$ .

Параксиальные инварианты на первой и второй поверхностях линзы

$$I_1 = n_1 (y_1 \alpha_1 - h_1 \beta_1) \text{ и } I_2 = n_z (y_2 \bar{\alpha}_2 - h_2 \bar{\beta}_2)$$

должны быть равны. Здесь  $\bar{\alpha}_2, \bar{\beta}_2$  — углы на выходе из ГрОСр. При неравенстве инвариантов следует увеличить число коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$  в (3.9) и (3.11).

Функции углов и высот первого и второго параксиальных лучей по координате  $z$  представляют полиномами:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_2(z) &= -(A_1 + 2A_2z + 3A_3z^2 + 4A_4z^3 + 5A_5z^4); \\ \bar{h}_2(z) &= A_0 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 + A_4z^4 + A_5z^5, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \bar{\beta}(z) &= -(B_1 + 2B_2z + 3B_3z^2 + 4B_4z^3 + 5B_5z^4); \\ \bar{y}(z) &= B_0 + B_1z + B_2z^2 + B_3z^3 + B_4z^4 + B_5z^5. \end{aligned} \quad (3.13)$$

### 3.2. Гауссовы коэффициенты градиентной оптической системы

Параксиальные величины ГрОС можно определить двумя методами. *Первый* из них основан на расчете параксиальных лучей с определенными начальными условиями. Траекторию луча в среде с показателем преломления  $n(y, z) = n_0(z) + n_1(z)y^2 + \dots$  описывают системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dz} &= \frac{p}{n_0(z)}; \\ \frac{dp}{dz} &= 2n_1(z)y, \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

где  $p, y$  — соответственно оптический направляющий косинус и высота параксиального луча.

В системе (3.14) величина  $p$  связана с углом  $\alpha$ , который образует параксиальный луч с осью  $OZ$ :  $p = -n_0(z)\alpha$ . Чтобы вычислить траекторию луча, проинтегрируем выражения (3.14) с учетом начальных условий:

$$y(0) = y|_{z=0} = y_0;$$

$$p(0) = p|_{z=0} = p_0 = -n_0(0)\alpha_0 = -n_0\alpha_0.$$

Решения (3.14) для случаев РРПП, ОРПП, СРПП приведены в 3.1.

*Второй* метод основан на определении гауссовых величин оптической системы как функции гауссовых коэффициентов  $A, B, C, D$ . Для системы, расположенной между плоскостями предмета и изображения, в параксиальном приближении можно записать

$$\begin{aligned} y_2 &= ay_1 + b\alpha_1; \\ \alpha_2 &= cy_1 + d\alpha_1, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где  $y_1, \alpha_1$  и  $y_2, \alpha_2$  — высота и угол луча с оптической осью соответственно на входе и выходе ОС.

Приведем (3.15) в матричном виде:

$$\begin{vmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{vmatrix}.$$

Перейдем к оптическим направляющим косинусам относительно оси  $OY$ :

$$\begin{aligned} p_1 &= n_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right) = n_1 \sin \alpha_1 \approx n_1 \alpha_1; \\ p_2 &= n_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right) = n_2 \sin \alpha_2 \approx n_2 \alpha_2, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} y_2 &= Ay_1 + Bp_1; \\ p_2 &= Cy_1 + Dp_1. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Представим (3.16) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ p_1 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Таким образом, в рассматриваемой ОС операции преобразования луча соответствует матрица  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ , с помощью которой можно рассчитать, согласно (3.17), координату и угол наклона луча на вы-



ходе из системы по координате и углу наклона на ее входе. Следовательно, эта матрица характеризует свойства системы в параксиальном приближении.

Использование матриц для расчетов основано на трех положениях.

1. *Каждому элементарному преобразованию луча в ОС соответствует своя матрица.* Приведем примеры элементарных преобразований.

$$\mathbf{M} = \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix} \text{ — матрица преломления луча на выпуклой сфе-}$$

рической поверхности радиусом  $R$ , разделяющей оптические среды с показателями преломления, равными  $n_1$  и  $n_2$ .

$$\mathbf{M} = \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & z/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ — матрица перемещения луча на расстояние } z \text{ в од-}$$

нородной среде с показателем преломления, равным  $n$ .

$$\mathbf{M} = \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \cos(gz) & \sin(gz)/n_{00}g \\ -n_{00}g \sin(gz) & \cos gz \end{pmatrix} \text{ — матрица перемещения луча в}$$

среде с параболическим РРПП (градан) длиной  $z$ , показателем преломления  $n_{00}$  на оси и константой распределения  $g$ .

Конкретный вид каждой матрицы получают из рассмотрения хода параксиального луча через ГрОСр.

2. *Матрицу сложной (составной) ОС при прохождении луча вычисляют как произведение матриц элементарных преобразований, взятых с порядком сомножителей, обратным тому, в котором луч совершает элементарные преобразования (т. е. против хода луча).* В этом легко убедиться, если рассмотреть ход луча через систему с четырьмя элементарными преобразованиями:

$$\begin{pmatrix} y_4 \\ p_4 \end{pmatrix} = (\mathbf{M}_3) \begin{pmatrix} y_3 \\ p_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{M}_3)(\mathbf{M}_2) \begin{pmatrix} y_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{M}_3)(\mathbf{M}_2)(\mathbf{M}_1) \begin{pmatrix} y_1 \\ p_1 \end{pmatrix}.$$

Результирующая матрица всей ОС:

$$(\mathbf{M}_\Sigma) = (\mathbf{M}_3)(\mathbf{M}_2)(\mathbf{M}_1). \quad (3.18)$$

3. *Выполнение оптической системой определенных функций накладывает требования на элементы матрицы, соответствующей этой системе.* Эти требования или условия достаточно просты: приравнива-

ние к нулю одного из четырех элементов матрицы, а также создание из коэффициентов  $A, B, C, D$  определенных комбинаций.

**$A = 0$ .** Из уравнений (3.17) следует, что  $y_2 = B p_1$ .

Высота луча  $y_2$  на выходе из ОС не зависит от его высоты на входе, а определяется только направляющим косинусом  $p_1$  на входе луча в систему. Лучи с  $p_1$  на входе соберутся на выходе в точку с координатой  $y_2$ . Таким образом, выражение  $A = 0$  — условие фокусировки системой параллельного пучка лучей.

**$B = 0$ .** В соответствии с (3.17)  $y_2 = A y_1$ .

Положение луча на выходе системы определяется только его положением на входе. Все лучи, вошедшие в систему в точке с координатой  $y_1$ , окажутся на выходе в точке с координатой  $y_2$ . Выражение  $B = 0$  — условие передачи изображения, при этом  $A = y_2/y_1$  — линейное увеличение.

**$C = 0$ .** Из (3.17) имеем  $p_2 = D p_1$ .

Наклон луча на выходе определяется только его наклоном на входе и не зависит от координаты луча, т. е. параллельные пучки на входе системы остаются таковыми и на выходе. Следовательно,  $C = 0$  — условие телескопичности системы. При этом  $\frac{n_1}{n_2} D = \frac{p_2}{p_1} \frac{n_1}{n_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$  дает угловое увеличение системы.

**$D = 0$ .** Из (3.17) получаем  $p_2 = C y_1$ .

Вошедшие в систему в точке с координатой  $y_1$  лучи имеют одинаковый наклон на выходе из системы. Это означает, что  $D = 0$  — условие получения параллельного пучка лучей из пучка, выходящего из точки.

Используем формулу (3.17) для градана:

$$f' = -\frac{1}{C} = -\frac{1}{n_{00}t \sin(td)}; \quad f = \frac{1}{C} = -\frac{1}{n_{00}t \sin(td)}.$$

Передний, задний фокальные отрезки, а также положения главных плоскостей градана определяются через коэффициенты  $A, C, D$ :

$$s_F = \frac{D}{C} = -\frac{1}{t n_{00} \operatorname{tg}(td)}; \quad s'_{F'} = -\frac{A}{C} = \frac{1}{t n_{00} \operatorname{tg}(td)};$$

$$s_H = \frac{D-1}{C} = \frac{1}{n_{00}t} \operatorname{tg}\left(\frac{td}{2}\right); \quad s'_{H'} = \frac{1-A}{C} = -\frac{1}{n_{00}t} \operatorname{tg}\left(\frac{td}{2}\right).$$

В качестве примера решим две задачи с использованием методов матричной оптики.

**Задача 1.** Левый конец длинного цилиндрического стержня из оргстекла с показателем преломления  $n = 1,56$  имеет выпуклую сферическую поверхность радиусом кривизны 28 мм. Предмет в виде стрелки длиной 20 мм расположен в воздухе на расстоянии 150 мм от входной поверхности. Определить положение и размер изображения внутри стержня.

*Решение:*

Обозначим через  $z$  расстояние от вершины поверхности до изображения. Матрица сложной ОС состоит из матриц элементарных преобразований: воздушный промежуток, преломляющая поверхность, промежуток внутри стержня. Запишем эту матрицу, согласно (3.18):

$$(M_{\Sigma}) = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1,56-1}{2,8} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{z}{7,8} & 15 - \frac{z}{0,78} \\ -0,2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Условие образования изображения —  $B = 0$ , отсюда  $z = 150 \cdot 0,78 = 117$  мм, линейное увеличение  $A = 1 - 150 \cdot 0,78/78 = -0,5$ , размер изображения  $y_2 = 20 - (-0,5) = -10$  мм (знак минус показывает, что изображение перевернутое).

**Задача 2.** На плоский входной торец градана параллельно оси падает пучок лучей, которые, проходя его, преломляются на выходном торце и собираются в точке на оси. Найти расстояние от выходного торца градана до точки фокусировки, если окружающая градан среда — воздух. Параметры градана:  $z$  — длина;  $g$  — константа распределения;  $n_{00}$  — ПП на оси.

*Решение:*

Обозначим искомое расстояние  $s'$ . Тогда матрицу системы (градан, воздушный промежуток длиной  $s'$ ) запишем следующим образом:

$$(M_{\Sigma}) = \begin{pmatrix} 1 & s' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(gz) & \frac{\sin(gz)}{n_{00}g} \\ -n_{00}g \sin(gz) & \cos(gz) \end{pmatrix}.$$

Определяем выражение для коэффициента  $A$  матрицы и приравняем его к нулю:

$$\cos(gz) - n_{00} g s' \sin(gz) = 0; \quad s' = \frac{1}{n_{00} g} \operatorname{ctg}(gz).$$

Матрица расчета хода луча в градиентной среде для элемента с  $n_1 = n_2 \neq 1$  и плоскими торцами («plano-plano») имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(zt) & \frac{n_1}{n_{00}t} \sin(zt) \\ -\frac{n_{00}t}{n_2} \sin(zt) & \frac{n_1}{n_2} \cos(zt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

а для плоско-выпуклого элемента («plano-convex»)

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(zt) - \frac{C}{t} \sin(zt) & \frac{n_1}{n_{00}t} \sin(zt) \\ -\frac{n_{00}}{n_2} |t \sin(zt) + C \cos(zt)| & \frac{n_1}{n_2} \cos(zt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

где  $n_1, n_2$  — показатели преломления в пространстве предметов и изображений; константа преломления  $C$  рассчитывается по формуле

$$C = \frac{(n_{00} - n_1)}{n_{00} R}.$$

Следует обратить внимание на систему координат, для которой приведены матричные выражения. В (3.19), (3.20) она привязана к плоскости предметов, поэтому расстояние до предмета по ходу луча будет со знаком плюс, а знаки углов лучей противоположны знакам углов лучей в системе координат, привязанной к первой поверхности линзового элемента — для нее матрицы будут следующие:

$$\text{«Plano-plano»} \quad \begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(zt) & -\frac{n_1}{n_{00}t} \sin(zt) \\ \frac{n_{00}t}{n_2} \sin(zt) & \frac{n_1}{n_2} \cos(zt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix};$$

$$\text{«Plano-convex»} \quad \begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(zt) - \frac{c}{t} \sin(zt) & -\frac{n_1}{n_{00}t} \sin(zt) \\ \frac{n_{00}}{n_2} |t \sin(zt) + C \cos(zt)| & \frac{n_1}{n_2} \cos(zt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Для среды с ОРПП  $n_k = n_{0,k}(z)$  элементы матрицы имеют вид

$$A = D = 1; \quad B = \int_0^d \frac{dz}{n_0(z)}; \quad C = 0,$$

где  $z$  — расстояние вдоль оптической оси с началом координат в вершине  $k$ -й поверхности.

Если  $n = n(z)$  (случай ОРПП), то

$$A = 1 - [n_0(0) - 1]\rho_1 B; \quad B = \int_0^d \frac{dz}{n_0(z)};$$

$$C = -[n_0(0) - 1]\rho_1 + [n_0(d) - 1]\rho_2 A; \quad D = 1 + [n_0(d) - 1]\rho_2 B.$$

### 3.3. Теория хроматизма градиентных оптических систем. Коэффициенты хроматических аберраций

При работе оптической системы в конечном спектральном диапазоне в изображении присутствуют хроматические аберрации, приводящие к снижению разрешающей способности системы. Традиционно в ОС указанные аберрации исправляют применением линз из стекол типа «крон» и «флинт» с разными коэффициентами дисперсии, положительными и отрицательными оптическими силами. У градиентных сред дисперсией обладает не только базовое стекло, но и градиент ПП.

**Дисперсионные модели и константы ГрОСр.** Во время проектирования системы, предназначенной для работы в определенном спектральном диапазоне, для минимизации хроматизма должны быть известны данные по дисперсионным зависимостям градиентных сред в рассматриваемом диапазоне.

Далее приводятся дисперсионные формулы, применяемые фирмами—производителями ГрОЭ различных типов. Использование формул удобно при компьютерном моделировании хроматических характеристик ГрОС.

*Фирма LightPath* — модифицированная формула Зельмейера:

$$n(\lambda)^2 - n(\lambda_{\text{оп}})^2 = \sum_i \frac{K_i \lambda^2}{\lambda^2 - L_i} \quad (\lambda \text{ в мкм}),$$

где  $n(\lambda_{\text{оп}})$  — ПП на опорной длине волны;  $K_i, L_i$  — константы,

$$K_i = \sum_{j=1}^k K_{ij} [n(z, \lambda_{\text{оп}})]^{j-1}, \quad L_i = \sum_{j=1}^k L_{ij} [n(z, \lambda_{\text{оп}})]^{j-1}, \quad i = 1, \dots, 3.$$

Фирма *Gradient Lens Corporation*. Для ГрОСр с РППП  $n(r) = n_{00} + n_{10}r^2 + n_{20}r^4$  дисперсионные значения коэффициентов  $n_{ij}$  рассчитывают как

$$n_{ij}(\lambda) = A + B\lambda^2 + \frac{C}{\lambda^2} + \frac{D}{\lambda^4} \quad (\lambda \text{ в нм}).$$

Фирма *Grintech Radial Gradient*. Для ГрОСр с РППП дисперсию задают выражением

$$n_0(\lambda) = 1,61189 + \frac{7614}{\lambda^2} \quad (\lambda \text{ в нм}).$$

Фирма *GO/FOTON*. Выпускает ГрОЭ *Selfoc*, в которых показатель преломления и константу РПП представляют полиномами

$$n(\lambda) = B + \frac{C}{\lambda^2}; \quad t(\lambda) = K_0 + \frac{K_1}{\lambda^2} + \frac{K_2}{\lambda^4},$$

где  $B, C, K_0, K_1, K_2$  — константы.

Типичные графики зависимостей  $n(\lambda)$  и  $t(\lambda)$  с нормальным ходом дисперсии приведены на рис. 3.1.

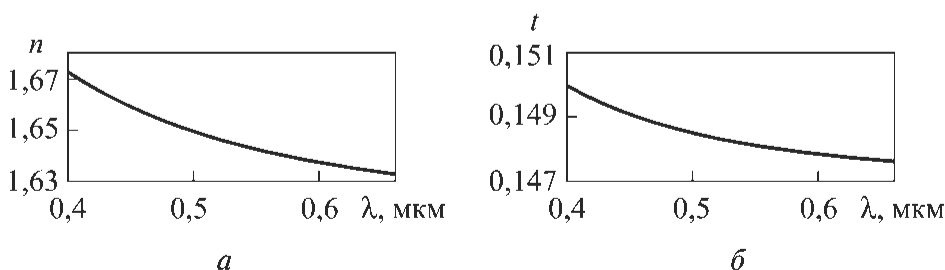
Градиентные среды характеризуются системой констант — коэффициентов дисперсии. Хроматические полиномы в случае РППП:

$$n(\lambda 1, y) = n_{00,\lambda 1} + n_{10,\lambda 1}y^2 + n_{20,\lambda 1}y^4 + n_{30,\lambda 1}y^6 + \dots;$$

$$n(\lambda 2, y) = n_{00,\lambda 2} + n_{10,\lambda 2}y^2 + n_{20,\lambda 2}y^4 + n_{30,\lambda 2}y^6 + \dots.$$

Среднюю дисперсию такой среды определяют как разность

$$n(\lambda 1, y) - n(\lambda 2, y) = (n_{00,\lambda 1} - n_{00,\lambda 2}) + (n_{10,\lambda 1} - n_{10,\lambda 2})y^2 + \\ + (n_{20,\lambda 1} - n_{20,\lambda 2})y^4 + (n_{30,\lambda 1} - n_{30,\lambda 2})y^6 + \dots.$$



**Рис. 3.1.** Спектральные зависимости: *a* — основного ПП; *б* — константы  $t$  градиентного элемента *Selfoc*

По аналогии с однородным ПП вводим для РРПП коэффициенты дисперсии градиентной среды:

$$\begin{aligned} v_{00} &= \frac{n_{00,\lambda 0} - 1}{n_{00,\lambda 1} - n_{00,\lambda 2}}; & v_{10} &= \frac{n_{10,\lambda 0}}{n_{10,\lambda 1} - n_{10,\lambda 2}}; \\ v_{20} &= \frac{n_{20,\lambda 0}}{n_{20,\lambda 1} - n_{20,\lambda 2}}; & v_{30} &= \frac{n_{30,\lambda 0}}{n_{30,\lambda 1} - n_{30,\lambda 2}}; \dots, \end{aligned} \quad (3.21)$$

тогда получаем

$$n(\lambda 1, y) - n(\lambda 2, y) = \frac{n_{00,\lambda 0} - 1}{v_{00}} + \frac{n_{10,\lambda 0}}{v_{10}} y^2 + \frac{n_{20,\lambda 0}}{v_{20}} y^4 + \frac{n_{30,\lambda 0}}{v_{30}} y^6 + \dots$$

В среде с ОРПП полиномы РПП для длин волн  $\lambda 1, \lambda 2$  имеют вид

$$n(\lambda 1, z) = n_{0,\lambda 1} + n_{01,\lambda 1} z + n_{02,\lambda 1} z^2 + n_{03,\lambda 1} z^3 + \dots;$$

$$n(\lambda 2, z) = n_{0,\lambda 2} + n_{01,\lambda 2} z + n_{02,\lambda 2} z^2 + n_{03,\lambda 2} z^3 + \dots,$$

а среднюю дисперсию ПП определяют как

$$\begin{aligned} n(\lambda 1, z) - n(\lambda 2, z) &= (n_{0,\lambda 1} - n_{0,\lambda 2}) + (n_{01,\lambda 1} - n_{01,\lambda 2}) z + \\ &+ (n_{02,\lambda 1} - n_{02,\lambda 2}) z^2 + (n_{03,\lambda 1} - n_{03,\lambda 2}) z^3 + \dots \end{aligned}$$

По аналогии с РРПП вводим коэффициенты дисперсии для ОРПП:

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{n_{0,\lambda 0} - 1}{n_{0,\lambda 1} - n_{0,\lambda 2}}; & v_{01} &= \frac{n_{01,\lambda 0}}{n_{01,\lambda 1} - n_{01,\lambda 2}}; \\ v_{02} &= \frac{n_{02,\lambda 0}}{n_{02,\lambda 1} - n_{02,\lambda 2}}; & v_{03} &= \frac{n_{03,\lambda 0}}{n_{03,\lambda 1} - n_{03,\lambda 2}}; \dots, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где  $v_0$  — коэффициент дисперсии в начале среды, тогда

$$n(\lambda_{1,z}) - n(\lambda_{2,z}) = \frac{n_{0,\lambda 0} - 1}{v_0} + \frac{n_{01,\lambda 0}}{v_{01}} z + \frac{n_{02,\lambda 0}}{v_{02}} z^2 + \frac{n_{03,\lambda 0}}{v_{03}} z^3 + \dots$$

Таким образом, по известным коэффициентам РПП  $n_{\lambda 0}$  основной длины волны и дисперсии  $v_{ij}$  можно рассчитать дисперсию градиентного ПП неоднородной среды.

Для трехмерного РПП дисперсия показателя преломления выражается через коэффициенты дисперсии  $v_{ij}$  коэффициентов  $n_{ij}$  уравнения (1.23):

$$n_1(z) = n_{10} + n_{11}z + n_{12}z^2; \quad n_2(z) = n_{20} + n_{21}z + n_{22}z^2.$$

Как было отмечено ранее, для функции ОРПП применяют переход в обозначении  $n_{00} = n_0$ .

**Коэффициенты хроматических aberrаций положения и увеличения.** Теория хроматизма ОС построена на вычислении и анализе коэффициентов 1-й и 2-й хроматических aberrаций (положения  $S_{\text{Ixp}}$  и увеличения  $S_{\text{IIxp}}$ ), по значению которых определяют первую и вторую первичные хроматические aberrации 1-го порядка:

$$\Delta s'_{\lambda 1, \lambda 2} = \frac{S_{\text{Ixp}}}{n'_p \alpha_p'^2}; \quad \frac{\Delta y'_{\lambda 1, \lambda 2}}{y'_{\lambda 0}} = \frac{S_{\text{IIxp}}}{J}, \quad (3.23)$$

где  $J$  — параксиальный инвариант Лагранжа—Гельмгольца.

Чтобы вычислить коэффициенты хроматических aberrаций, необходимо знать функциональные зависимости  $h(z)$  и  $\alpha(z)$ , коэффициенты РПП  $n_{00}$ ,  $n_{10}$ ,  $n_{01}$ , а также их дисперсии —  $dn_{00}$ ,  $dn_{10}$ ,  $dn_{01}$ .

Коэффициент хроматической aberrации ОС является суммой двух составляющих, обусловленных преломлением лучей на поверхности ( $\bar{S}_{i,k}$  — *поверхностный вклад*) и прохождением луча через неоднородную среду ( $\tilde{S}_{i,k}$  — *вклад переноса*):

$$S_i = \bar{S}_{i,k} + \tilde{S}_{i,k}, \quad i = \text{I, II}, \quad k — \text{номер поверхности.}$$

Для ОС, состоящей из  $p$  поверхностей, рассматриваемые коэффициенты рассчитывают по формулам

$$S_{\text{Ixp}} = \sum_{k=1}^p \bar{S}_{\text{Ixp},k} + \sum_{k=1}^{p-1} \tilde{S}_{\text{Ixp},k}; \quad S_{\text{IIxp}} = \sum_{k=1}^p \bar{S}_{\text{IIxp},k} + \sum_{k=1}^{p-1} \tilde{S}_{\text{IIxp},k}.$$

В общем случае РПП, заданного зависимостями (1.20), (1.21), выражения для поверхностных вкладов у коэффициентов aberrаций имеют одинаковый вид для однородных и градиентных сред:

$$\bar{S}_{\text{Ixp},k} = h_k \frac{\delta(\alpha_k)}{\delta(\mu_k)} \delta\left(\frac{dn_{0,k}}{n_{0,k}}\right); \quad \bar{S}_{\text{IIxp},k} = h_k \frac{\delta(\beta_k)}{\delta(\mu_k)} \left(\frac{dn_{0,k}}{n_{0,k}}\right), \quad (3.24)$$

где  $h_k$  — высота луча на поверхности;  $\mu_k = \frac{1}{n_{0,k}}$ ;  $dn_{0,k} = n_{0,k,\lambda 1} - n_{0,k,\lambda 2}$  —

средняя дисперсия ПП. Знак разности  $\delta$  относится к оптической поверхности; для ОРПП имеем  $dn_0 = n_{0,\lambda 1} - n_{0,\lambda 2}$ ,  $dn_z = n_{z,\lambda 1} - n_{z,\lambda 2}$ ; у РРПП  $dn_0 = dn_{00} = n_{00,\lambda 1} - n_{00,\lambda 2}$ .



В линзе с ОРПП и неоднородностью показателя преломления на всю толщину линзы поверхностный вклад в коэффициент хроматической аберрации положения составляет

$$S_{I0} = - \left[ (\alpha_2 - \alpha_1) h_1 \frac{1}{v_0} + (\alpha_3 - \bar{\alpha}_2) h_2 \frac{1}{v_z} \right],$$

где  $v_0, v_z$  — коэффициенты дисперсии в вершинах поверхностей линзы.

Поверхностный вклад в коэффициент хроматической аберрации положения с учетом  $v_{00} = v_0 = v_z$  и при наличии в линзе РРПП:

$$S_{I0} = - \frac{1}{v_{00}} [(\alpha_2 - \alpha_1) h_1 + (\alpha_3 - \bar{\alpha}_2) h_2]. \quad (3.25)$$

Вклады переноса в коэффициенты хроматических аберраций положения и увеличения  $k$ -й среды описывают формулами

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\text{Ихр},k} &= \Delta(h\alpha(dn_0)) + \int_0^d [2\bar{h}^2(dn_1) + \bar{\alpha}^2(dn_0)] dz; \\ \tilde{S}_{\text{Пхр},k} &= \Delta(h\beta(dn_0)) + \int_0^d [2\bar{h}y(dn_1) + \bar{\alpha}\bar{\beta}(dn_0)] dz, \end{aligned} \quad (3.26)$$

где  $dn_0 = n_{0,\lambda 1} - n_{0,\lambda 2}$ ;  $dn_1 = n_{1,\lambda 1} - n_{1,\lambda 2}$ ; при РРПП  $dn_0 = dn_{00}$ ,  $dn_1 = dn_{10}$ ,  $\bar{\alpha} = \alpha(z)$ ,  $\bar{\beta} = \beta(z)$  и  $\bar{h} = h(z)$ ,  $\bar{y} = y(z)$  — функции углов и высот лучей по координате  $z$ .

**Хроматизм системы тонких линз с радиальным распределением показателя преломления.** Считаем, что РРПП в меридиональной плоскости задано полиномом  $n(y) = n_{00} + n_{10}y^2 + n_{20}y^4 + \dots$

Продольную хроматическую аберрацию системы тонких компонентов в воздухе можно определить по формуле

$$S_{\text{Ихр}} = \frac{1}{\alpha_p'^2} \sum_1^p h_i^2 (d\bar{\Phi}_i + d\tilde{\Phi}_i), \quad \Phi_i = \bar{\Phi}_i + \tilde{\Phi}_i, \quad (3.27)$$

где  $h_i$  — высота осевого луча на компоненте с номером  $i$ ;  $\alpha_p'$  — угол первого параксиального луча в пространстве изображений;  $d\bar{\Phi}_i$  — дисперсия оптической силы компонента, обусловленная дисперсией базового ПП,  $d\bar{\Phi}_i = \frac{\Phi_i}{v_{00}}$ ,  $v_{00} = \frac{n_{00\lambda 0} - 1}{n_{00\lambda 1} - n_{00\lambda 2}}$ ;  $d\tilde{\Phi}_i$  — дисперсия оптической силы  $i$ -го компонента, обусловленная дисперсией коэффициен-

тов полинома РРПП,  $d\tilde{\Phi}_i = -2(n_{10\lambda 1} - n_{10\lambda 2})d$ ,  $d$  — толщина плоскопараллельной пластинки, равная толщине линзы (линзы Вуда).

Коэффициент  $n_{10}$  можно выразить через коэффициент дисперсии  $v_{10}$ , определенный, согласно (3.21):

$$v_{10} = \frac{n_{10\lambda 0}}{n_{10\lambda 1} - n_{10\lambda 2}},$$

тогда дисперсию  $d\tilde{\Phi}_i$  определяем как  $d\tilde{\Phi}_i = \frac{\tilde{\Phi}_i}{v_{10i}}$ .

Хроматизм положения одиночного тонкого компонента будет исправлен, если выполнено условие  $\frac{\bar{\Phi}_i}{v_{00i}} = -\frac{\tilde{\Phi}_i}{v_{10i}}$ .

Из выражения (3.27) следует условие исправления хроматической аберрации положения в одиночной тонкой линзе с РРПП:

$$\frac{\bar{\Phi}}{v_{00}} = \frac{2n_{10}d_{\text{л}}}{v_{10}}, \quad (3.28)$$

где  $d_{\text{л}}$  — толщина линзы.

По формуле (3.28) можно определить коэффициенты дисперсии базового стекла  $v_{00}$  или градиентной среды  $v_{10}$ , необходимые для исправления в тонкой линзе первой хроматической аберрации.

В общем случае у системы из  $p$  тонких однородных и градиентных компонентов 1-ю и 2-ю хроматические аберрации 1-го порядка можно рассчитать по известным формулам

$$\Delta s'_{\lambda 1\lambda 2} = \frac{1}{n_p' \alpha_p'^2} \sum_1^p h_i^2 \Phi_i C_i, \quad \frac{\Delta y'_{\lambda 1\lambda 2}}{y'} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^p h_i y_i \Phi_i C_i,$$

где  $C_i$  — основной хроматический параметр оптической среды,  $C_i = \Phi_i/v_i$ ;  $h_i$ ,  $y_i$  — высоты первого и второго параксиальных лучей на компонентах ОС.

При линейном ОРПП среды можно показать, что для конечной (но малой) толщины ОС при условии  $n_{01}^2 d \cong 0$  вклад переноса в коэффициент хроматической аберрации положения имеет значение, близкое к нулю. Коэффициент хроматизма положения будет определяться преимущественно поверхностным вкладом:

$$S_{\text{Ixp}} = \frac{h_2}{v_{2\text{пов}}} (\bar{\alpha}_2 n_z - \alpha_3) - \frac{h_1}{v_{1\text{пов}}} (\alpha_2 n_0 - \alpha_1),$$

где  $v_{1\text{пов}}, v_{2\text{пов}}$  — коэффициенты дисперсии (числа Аббе) в вершинах первой и второй поверхностей линзы:

$$v_{1\text{пов}} = \frac{n_{0\lambda 0} - 1}{n_{0\lambda 1} - n_{0\lambda 2}},$$

$$v_{2\text{пов}} = \frac{(n_{0\lambda 0} - 1 + \Delta n_{0\lambda 0})v_{00}v_{01}}{(n_0 - 1)v_{01} + \Delta n_{0\lambda 0}v_{00}},$$

где  $v_{00}, v_{01}$  — коэффициенты дисперсии ГрОСр;  $\Delta n_{0\lambda 0}$  — перепад показателя преломления между первой и второй поверхностями линзы.

**Хроматизм положения толстой линзы с радиальным распределением показателя преломления.** В случае линзы конечной толщины с РРПП подставляем функции  $\alpha(z), \beta(z), h(z), y(z)$  из (3.3), (3.4) в (3.25), (3.26), проводим алгебраические преобразования и интегрируем полученные выражения. В результате получаем формулы  $S_{\text{Ixp}}, S_{\text{IIxp}}$ , удобные для анализа коэффициентов первичного хроматизма при решении задачи синтеза градиентного компонента:

$$S_{\text{Ixp}} = -\frac{1}{v_{00}} \left[ (\alpha_2 - \alpha_1)h_1 + (\alpha_3 - \bar{\alpha}_2)h_2 \right] +$$

$$+ dn_{10} \left[ h_1^2 d + \frac{\alpha_2^2 d}{t^2} + \sin(2td) \left( \frac{h_1^2}{2t} - \frac{\alpha_2^2}{2t^3} \right) - 2 \frac{\alpha_2 h_1}{t^2} \sin^2(td) \right] +$$

$$+ dn_{00} \left[ \frac{1}{2} \alpha_2^2 d + \frac{1}{2} h_1^2 t^2 d + \sin(2td) \left( \frac{\alpha_2^2}{4t} - \frac{1}{4} h_1^2 t \right) + h_1 \alpha_2 \sin^2(td) \right] +$$

$$+ dn_{00} \left( h_2 (\alpha_2 \cos(td) + h_1 t \sin(td)) - h_1 \alpha_2 \right). \quad (3.29)$$

Для удобства анализируем (3.29) с помощью графического метода, строя отдельно графики каждой входящей в это выражение функции от  $\alpha_2$  при заданной дисперсии базового ПП и коэффициента  $n_{10}$ . По минимумам этих функций определяют угол  $\alpha_2$ , при котором  $S_{\text{Ixp}}$  имеет минимальное значение. Полученное решение проверяют численной оптимизацией оценочной функции, включающей оператор первой хроматической aberrации. Данный метод расширяет возможности анализа по сравнению с (3.27), позволяет учитывать влияние толщины линзы на хроматическую aberrацию положения.

## Вопросы для самопроверки

1. Назовите методы расчета параксиальных характеристик ГрОС.
2. В чем заключается сущность применения гауссовых коэффициентов при расчете характеристик ГрОС?
3. В чем состоит особенность масштабирования параметров ГрОЭ?
4. Обоснуйте особенности расчета хроматизма тонкого и толстого линзовых элементов.
5. Приведите и поясните математическую запись дисперсионных констант ГрОС с РРПП и ОРПП.
6. Приведите дисперсионные формулы для ГрОСр с РРПП и ОРПП.

## **4. ТЕОРИЯ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ АБЕРРАЦИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ГРАДИЕНТНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

В 1856 г. немецким астрономом и оптиком Ф. Л. Зейделем для общего случая осесимметричных оптических систем была разработана теория aberrаций, основанная на разложении последних в ряд. Дальнейшее развитие теории продолжалось с использованием введенного У. Р. Гамильтоном в 1831 г. метода Эйконала — оценка характеристической функции оптической системы. Требования по совершенствованию ОС сделали актуальной возможность применения регулярных неоднородностей оптических сред в качестве aberrационного параметра. В прямоугольной системе координат на базе расчета вариаций, построенных на принципе Ферма, профессором австралийского университета Х. А. Бучдолом получены общие выражения для вычислений aberrаций 3-го порядка оптической системы, в которой показатель преломления изменяется непрерывно в направлении от объекта к изображению. Американский ученый П. Дж. Сэндс вывел уравнения для коэффициентов aberrаций 3-го порядка с любым числом границ между оптическими средами. Из вариационного принципа следует, что некоторые теоремы, применимые к однородным средам, применимы к ОС с неоднородными оптическими средами, также не меняется форма параксиального инварианта, одинаковы ряд коэффициентов aberrаций 3-го порядка и их геометрическая интерпретация. Справедливость этих результатов определяется наличием осевой симметрии ОС, в остальном РПП произвольно.

С помощью теории монохроматических aberrаций 3-го порядка оценивают индивидуальные вклады поверхностей и толщины неоднородной оптической среды в aberrации системы. Это позволяет обосновывать необходимость применения неоднородной среды в конкретном случае проектирования.

## 4.1. Абберационный полином и коэффициенты аббераций третьего порядка

Выражения для абберационных составляющих  $\Delta y'_{III}$  и  $\Delta x'_{III}$  3-го порядка в полярных зрачковых координатах  $\rho$ ,  $\Theta$  включают соответствующие коэффициенты аббераций  $\sigma_i$  и для обладающих вращательной симметрией однородной и градиентной ОС имеют следующий общий вид:

$$\Delta y'_{III} = \sigma_1 \rho^3 \cos \Theta + \sigma_2 \rho^2 h (2 + \cos 2\Theta) + (3\sigma_3 + \sigma_4) \rho h^2 \cos \Theta + \sigma_5 h^3;$$

$$\Delta x'_{III} = \sigma_1 \rho^3 \sin \Theta + \sigma_2 \rho^2 h \sin 2\Theta + (\sigma_3 + \sigma_4) \rho h^2 \sin \Theta,$$

где  $\sigma_{1,...,5}$  — коэффициенты аббераций 3-го порядка: сферической, комы, астигматизма, кривизны Петцваля, дисторсии;  $\rho$ ,  $\Theta$  — нормированные полярные координаты луча на входном зрачке;  $h$  — нормированная высота объекта.

Как было показано П. Дж. Сэндсом, каждый из коэффициентов аббераций 3-го порядка градиентной системы, включающей одну или несколько ГрОСр, выражается через сумму вкладов каждой поверхности, разделяющей две различающиеся среды, и сумму интегралов по каждой градиентной среде. Вклад поверхности состоит из двух составляющих: зейделевского (обычного) вклада, вычисленного в предположении однородной среды, и дополнительного члена, учитывающего вариацию ПП по поверхности. Выражение для коэффициентов аббераций 3-го порядка:

$$\sigma_i = \eta \left( \sum_{k=1}^{p-1} a_{ij} + \sum_{k=1}^p a_{ij}^* \right),$$

где  $a_{ij}$  — вклад, вносимый поверхностью раздела двух граничащих сред;  $a_{ij}^*$  — вклад, обусловленный прохождением луча через неоднородную среду, так называемый вклад переноса;  $\eta = -\frac{1}{n_n v'_{1n}}$ ,  $v'_{1n}$  —

угол первого вспомогательного луча в пространстве изображений;  $i$  — индекс коэффициента абберации,  $i = 1, ..., 5$ ;  $k$  — индекс поверхности,  $k = (1, ..., (p-1))$ ,  $p$  — индекс оптической среды;  $n_n$  — ПП среды пространства изображений.

Вклады поверхности  $a_i$  описывают выражениями:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \tilde{a} + Ky_a^4; \\
a_2 &= q\tilde{a} + Ky_a^3y_b; \\
a_3 &= q^2\tilde{a} + Ky_a^2y_b^2; \\
a_4 &= \frac{1}{2}\lambda_{\text{Л-Г}}^2 C \delta \left( \frac{1}{n_0} \right); \\
a_5 &= q^3\tilde{a} + qa_4 + Ky_a y_b^3,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где  $\tilde{a} = \frac{1}{2}n_0 \left( \frac{n_0}{n'_0} - 1 \right) y_a i_a^2 (i_a + v'_a)$ ;  $K = -C \delta(2n_1 + \frac{1}{2}C\dot{n}_0)$ ;

$\dot{n}_0 = n_{01} + 2n_{02}z + 3n_{03}z^2 + \dots$ ;  $q = \frac{i_b}{i_a}$ ,  $i_a$ ,  $i_b$  — углы между нормалью и поверхностью в точке падения первого и второго вспомогательных лучей;  $\lambda_{\text{Л-Г}}$  — инвариант Лагранжа—Гельмгольца;  $C$  — кривизна поверхности;  $\delta$  — символ разности, отнесенный к  $k$ -й поверхности.

Вклад в коэффициент абберации, обусловленный переходом луча через неоднородную среду:

$$\begin{aligned}
a_1^* &= \frac{1}{2}\nabla(n_0 y_a v_a^3) + \int (4n_2 y_a^4 + 2n_1 y_a^2 v_a^2 - \frac{1}{2}n_0 v_a^4) dz; \\
a_2^* &= \frac{1}{2}\nabla(n_0 y_a v_a^2 v_b) + \int [4n_2 y_a^3 y_b + n_1 y_a v_a (y_a v_b + y_b v_a) - \frac{1}{2}n_0 v_a^3 v_b] dz; \\
a_3^* &= \frac{1}{2}\nabla(n_0 y_a v_a v_b^2) + \int (4n_2 y_a^2 y_b^2 + 2n_1 y_a y_b v_a v_b - \frac{1}{2}n_0 v_a^2 v_b^2) dz; \\
a_4^* &= \lambda^2 \int \frac{n_1}{n_0^2} dz;
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$a_5^* = \frac{1}{2}\nabla(n_0 y_a v_b^3) + \int [4n_2 y_a y_b^3 + n_1 y_b v_b (y_a v_b + y_b v_a) - \frac{1}{2}n_0 v_a v_b^3] dz,$$

где  $v_a$ ,  $v_b$  и  $y_a$ ,  $y_b$  — углы и высоты соответственно 1-го и 2-го вспомогательных лучей;  $\nabla$  — разность значений приведенного в скобках выражения, рассчитанного для конца и начала ГрОСр.

Первое слагаемое в (4.1) является зейделевым вкладом в коэффициент абберации; второе — дополнительное слагаемое, полученное вследствие неоднородной природы либо одной, либо обеих разделенных поверхностью оптических сред, — называется вкладом неоднородной природы ОСр. Приведенная форма записи коэффициентов аббераций связана с вычислением углов луча с нормалью в точке падения. Покажем, что от записи коэффициента  $\tilde{a}$  через величины  $y_a$ ,

$i_a, v'_a$  можно перейти к  $v_a, v'_a, y_a$ , т. е. представить (4.1) в параметрах первого и второго вспомогательных лучей ( $\alpha, h, y$ ), принятых в отечественной литературе для описания aberrаций 3-го порядка.

Из уравнения  $\tilde{a} = \frac{1}{2} i_a^2 \left[ n_0 \left( \frac{n_0}{n'_0} - 1 \right) y_a (i_a + v'_a) \right]$  с учетом  $i_a = \frac{\Delta\alpha}{\Delta\mu} \mu$ , где  $\mu = n_0^{-1}$ , после несложных преобразований находим

$$\tilde{a} = \frac{1}{2} i_a^2 n_0^2 y_a \Delta(\alpha\mu) = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta\alpha}{\Delta\mu} \right)^2 \Delta(\alpha\mu) y_a, \quad (4.3)$$

и с учетом  $y_a \rightarrow h$  для одной поверхности имеем

$$\tilde{a} = \frac{1}{2} h P, \quad (4.4)$$

где  $P = \left( \frac{\Delta\alpha}{\Delta\mu} \right)^2 \Delta(\alpha\mu)$ .

Из (4.3) следует, что для перехода от обозначения  $a_i$  к  $S_i$ , принятому в отечественной литературе, необходимо учесть коэффициент, равный 1/2.

Кроме того, как показывает анализ, выражения для коэффициентов aberrаций  $a_i$  записаны с учетом знаков углов параксиальных лучей в системе координат, привязанной к плоскости предмета. Это обстоятельство позволяет получать в окончательном виде выражения для коэффициентов aberrаций 3-го порядка в обозначениях и нормировке параметров вспомогательных лучей, принятых в отечественной литературе.

## 4.2. Коэффициенты aberrаций третьего порядка в параметрах Ланге для градиентных оптических систем

Выражения (4.1), (4.2) с учетом (4.3), (4.4) для коэффициентов aberrаций 3-го порядка осесимметричной ГРОС преобразуют к виду

$$S_i = \bar{S}_{i,k} + \tilde{S}_{i,k}, \quad (4.5)$$

где  $S_i$  — общий коэффициент aberrации для оптической системы;  $\bar{S}_{i,k}, \tilde{S}_{i,k}$  — вклады поверхностный и переноса соответственно,  $i = 1, \dots, 5$ ;  $k$  — номер поверхности.

Формулы для поверхностных вкладов в принятых в отечественной научно-технической и учебно-методической литературе обозначениях:



$$\begin{aligned}
\bar{S}_I &= \sum_{k=1}^n (h_k P_k + K_k h_k^4); \\
\bar{S}_{II} &= \sum_{k=1}^n [h_k P_k \left( \frac{\delta \beta_k}{\delta \alpha_k} \right) + K_k h_k^3 y_k]; \\
\bar{S}_{III} &= \sum_{k=1}^n [h_k P_k \left( \frac{\delta \beta_k}{\delta \alpha_k} \right)^2 + K_k h_k^2 y_k^2]; \\
\bar{S}_{IV} &= - \sum_{k=1}^n \frac{\delta \mu_k}{r_k}; \\
\bar{S}_V &= \sum_{k=1}^n \left\{ [h_k P_k \left( \frac{\delta \beta_k}{\delta \alpha_k} \right)^2 + \frac{J^2}{h_k} \frac{\delta(\alpha_k n_k)}{n_k n_{k+1}} \frac{\delta \beta_k}{\delta \alpha_k} + K_k h_k y_k^3] \right\},
\end{aligned} \tag{4.6}$$

где

$$\begin{aligned}
P_k &= \left( \frac{\delta \alpha_k}{\delta \mu_k} \right)^2 \delta(\alpha_k \mu_k); \quad K_k = \frac{4\delta n_{1k}}{r_k} + \frac{\delta \dot{n}_{0k}}{r_k^2}; \\
\delta \alpha_k &= \alpha'_k - \alpha_k; \quad \delta \beta_k = \beta'_k - \beta_k; \\
\begin{cases} J = -n_1(s - s_p)\alpha_1\beta_1 & \text{при } s \neq \infty, \\ J = -n_1 h_1 \beta_1 & \text{при } s = \infty, \end{cases}
\end{aligned}$$

$\alpha_k, \beta_k$  и  $\alpha'_k, \beta'_k$  — углы падения и преломления первого и второго вспомогательных лучей на  $k$ -й поверхности;  $h_k, y_k$  — высоты соответственно первого и второго вспомогательных лучей на поверхности радиусом кривизны  $r_k$ ;  $K_k$  — поверхностный неоднородный коэффициент, учитывающий неоднородную природу граничащих сред:

$$K_k = \frac{4\delta n_{10k}}{r_k} \text{ для РРПП; } K_k = \frac{\delta \dot{n}_{0k}}{r_k^2} \text{ при ОРПП.}$$

Вклад переноса  $\tilde{S}_i$  в  $i$ -й коэффициент абберации определяют из следующих выражений:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_I &= \sum_{k=1}^n [\Delta(n_{0,k} h_k \alpha_a^3) - \int (8n_{2,k+1} \bar{h}_{k+1}^4 + 4n_{1,k+1} \bar{h}_{k+1}^2 \bar{\alpha}_{k+1}^2 - n_{0,k+1} \bar{\alpha}_{k+1}^4) dz]; \\
\tilde{S}_{II} &= \sum_{k=1}^n \{ \Delta(n_{0,k} h_k \alpha_k^2 \beta_b) - \int [8n_{2,k+1} \bar{h}_k^3 \bar{y}_k + 2n_{1,k+1} \bar{h}_k \bar{\alpha}_k (\bar{h}_k \bar{\beta}_k + \bar{y}_k \bar{\alpha}_k) - \\
&\quad - n_{0,k+1} \bar{\alpha}_k^3 \bar{\beta}_k] dz \}; \\
\tilde{S}_{III} &= \sum_{k=1}^n [ \Delta(n_{0,k} h_k \alpha_k \beta_k^2) - \int (8n_{2,k+1} \bar{h}_k^2 \bar{y}_k^2 + 4n_{1,k+1} \bar{h}_k \bar{y}_k \bar{\alpha}_k \bar{\beta}_k - \\
&\quad - n_{0,k+1} \bar{\alpha}_k^2 \bar{\beta}_k^2) dz ];
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\tilde{S}_{IV} = - \int_0^{d_k} \frac{2n_1}{n_0^2} dz; \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_V = \sum_{k=1}^n [ \Delta(n_{0,k} h_k \beta_k^3) - \int [8n_{2,k+1} \bar{h}_k \bar{y}_k^3 + 2n_{1,k+1} \bar{y}_k \bar{\beta}_k (\bar{h}_k \bar{\beta}_k + \bar{y}_k \bar{\alpha}_k) - \\ - n_{0,k+1} \bar{\alpha}_k \bar{\beta}_k^3] dz, \end{aligned}$$

где  $\bar{\alpha}_{k+1}$ ,  $\bar{\beta}_{k+1}$  и  $\bar{h}_{k+1}$ ,  $\bar{y}_{k+1}$  — функции угла и высоты соответственно 1-го и 2-го вспомогательных лучей;  $d_k$  — осевая толщина ГрОСр между поверхностями  $k$  и  $k+1$ ;  $\Delta$  — символ разности значений выражения, заключенного в скобки, для конца и начала градиентной среды.

Таким образом, если знать функциональные зависимости по координате  $z$  вспомогательных лучей и подставить их в (4.6), (4.7), можно определить коэффициенты aberrаций 3-го порядка ГрОС.

Для среды с РРПП в формулах (4.7) следует применять следующие обозначения:  $n_0 = n_{00}$ ,  $n_1 = n_{10}$ ,  $n_2 = n_{20}$ . В этом случае

$$\tilde{S}_{IV} = - \sum_{k=1}^n \frac{2n_{10,k+1} d_k}{n_{00,k+1}^2}.$$

Выражения для вклада переноса в  $i$ -й коэффициент aberrации среды с ОРПП:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_I &= \sum_{k=1}^n [\Delta(n_{0,k} h_k \alpha_a^3) + \int \bar{n}_{0,k+1} \bar{\alpha}_{k+1}^4 dz]; \\ \tilde{S}_{II} &= \sum_{k=1}^n [\Delta(n_{0,k} h_k \alpha_k^2 \beta_b) + \int \bar{n}_{0,k} \bar{\alpha}_k^3 \bar{\beta}_k dz]; \\ \tilde{S}_{III} &= \sum_{k=1}^n [\Delta(n_{0,k} h_k \alpha_k \beta_k^2) + \int \bar{n}_{0,k+1} \bar{\alpha}_k^2 \bar{\beta}_k^2 dz]; \quad \tilde{S}_{IV} = 0; \\ \tilde{S}_V &= \sum_{k=1}^n [\Delta(n_{0,k} h_k \beta_k^3) + \int \bar{n}_{0,k+1} \bar{\alpha}_k \bar{\beta}_k^3 dz], \end{aligned} \quad (4.8)$$

верхняя черта над переменной означает функцию параметра по координате  $z$ .

Чтобы вычислить коэффициенты  $S_I, \dots, S_V$  для элементов ОРПП, подставляем (3.7) в (4.8) и проводим интегрирование.

Выражения (4.8) можно записать более компактно:

$$\tilde{S}_I = n_0^3 \alpha_0^3 G; \quad \tilde{S}_{II} = n_0^3 \alpha_0^2 \beta_0 G; \quad \tilde{S}_{III} = n_0^3 \alpha_0 \beta_0^2 G; \quad \tilde{S}_{IV} = 0; \quad \tilde{S}_V = n_0^3 \beta_0^3 G,$$

где  $G = \Delta \left[ \frac{h}{n^2(z)} \right]_{z=0}^{z=d} + n_0 \alpha_0 \int_0^d \frac{dz}{n^3(z)}; \quad \alpha_0 = \alpha(0); \quad \beta_0 = \beta(0).$

### 4.3. Обзор свойств асферической поверхности второго порядка и ее абберационные аналогии с градиентными оптическими элементами, имеющими РРПП или ОРПП

Математическая запись формул (4.6) для коэффициентов аббераций 3-го порядка ГрОС очень похожа на аналогичные формулы оптической системы с линзами, имеющими асферические поверхности (АП) 2-го порядка. Чтобы выявить аналогии, рассмотрим математические выражения для коэффициентов аббераций указанных систем.

Как показано ранее, АП 2-го порядка в меридиональной плоскости можно представить как  $y^2 = Az + Bz^2$ , или  $y^2 = 2r_0z - (1 - e^2)z^2$ , где  $e^2$  — квадрат эксцентриситета поверхности. Иногда представленную формулу записывают через коническую постоянную  $k = -e^2$ :

$$y^2 = 2r_0z - (1 + k)z^2.$$

По значению конической константы определяют тип поверхности:  $k = 0$  — сфера;  $k > 0$  — сплюснутый эллипсоид;  $-1 < k < 0$  — вытянутый эллипсоид;  $k = -1$  — параболоид;  $k < -1$  — гиперboloид.

Параболоид и гиперboloид (по сравнению со сферой) — более пологие поверхности, что уменьшает угол луча с нормалью к поверхности в точке падения. При увеличенной координате луча на поверхности уменьшение его угла падения может привести к уменьшению абберации, вплоть до полного исправления.

При наличии АП 2-го порядка на поверхности линзы выражения для коэффициентов аббераций следующие:

$$\begin{aligned} S_I &= \sum_{k=1}^n (h_k P_k + B_k h_k^4); \\ S_{II} &= \sum_{k=1}^n \left( h_k P_k \frac{\Delta \beta_k}{\Delta \alpha_k} + B_k h_k^3 y_k \right); \\ S_{III} &= \sum_{k=1}^n \left( h_k P_k \left( \frac{\Delta \beta_k}{\Delta \alpha_k} \right)^2 + B_k h_k^2 y_k^2 \right); \\ S_{IV} &= - \sum_{r=1}^n \frac{\Delta \mu_k}{r_k}; \\ S_V &= \sum_{k=1}^n \left[ \left( h_k P_k \left( \frac{\Delta \beta_k}{\Delta \alpha_k} \right)^2 + I^2 S_{IV,k} \right) \frac{\Delta \beta_k}{\Delta \alpha_k} + B_k h_k y_k^3 \right], \end{aligned} \quad (4.9)$$

где  $B_k$  — поверхностный коэффициент АП,  $B_k = \frac{b_k}{r_k^3}(n'_k - n_k)$ ;  $b_k$  — коэффициент деформации оптической поверхности,  $b_k = k_k = -e_k^2$ .

Для системы, включающей однородные и градиентные линзы, выражения (4.5) — (4.7) сохраняются по математической форме, однако *поверхностные асферические* коэффициенты  $B_k$  заменяют на  $K_k$  — *поверхностные градиентные*:

$$\begin{aligned} S_I &= \sum_{k=1}^n (h_k P_k + K_k h_k^4); \\ S_{II} &= \sum_{k=1}^n \left( h_k P_k \frac{\Delta \beta_k}{\Delta \alpha_k} + K_k h_k^3 y_k \right); \\ S_{III} &= \sum_{k=1}^n \left( h_k P_k \left( \frac{\Delta \beta_k}{\Delta \alpha_k} \right)^2 + K_k h_k^2 y_k^2 \right); \\ S_{IV} &= - \sum_{r=1}^n \left( \frac{\Delta \mu_k}{r_k} + \frac{2n_{10k} d_k}{n_{0k}^2} \right); \\ S_V &= \sum_{k=1}^n \left[ \left( h_k P_k \left( \frac{\Delta \beta_k}{\Delta \alpha_k} \right)^2 + I^2 S_{IV,k} \right) \frac{\Delta \beta_k}{\Delta \alpha_k} + K_k h_k y_k^3 \right]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

В общем случае задания функции ПП в виде  $n(z, x^2 + y^2)$  для  $k$ -й поверхности:

$$K_k = \frac{\delta 4n_{1k}}{r_k} + \frac{\delta \dot{n}_{0k}}{r_k^2}, \quad (4.11)$$

$$K_k = \frac{\delta 4n_{10}}{r_k} \quad (\text{РРПП}),$$

$$K_k = \frac{\delta (n_{01} + 2n_{02}z + 3n_{03}z^2 + \dots)}{r_k^2} \quad (\text{ОРПП}).$$

Сравнив (4.9) и (4.10), получим формулы перехода от параметров АП 2-го порядка к параметрам ГрОСр данного градиентного элемента.

Введение в уравнение поверхности коэффициента деформации  $b_{1,2}$  позволяет исправить сферическую абберацию исходной сферической линзы, определяемую коэффициентом  $S_I$ . Для первой поверхности коэффициент деформации рассчитывают по формуле

$$b_1 = -\frac{S_1 r_1^3}{(n_{00} - 1)h_1^4},$$

где  $r_1$ ,  $h_1$  — радиус кривизны и высота луча на первой поверхности линзы;  $n_{00}$  — показатель преломления стекла; исходная нормировка высоты  $h_1 = f'$ .

Для второй поверхности линзы коэффициент деформации равен

$$b_2 = \frac{S_1 r_2^3}{(n_{00} - 1)h_2^4},$$

где  $h_2$  — высота луча на второй поверхности линзы.

Асферизация поверхностей линз малого диаметра — сложная технологическая задача. Разработка теории aberrаций ГрОС и развитие технологий неоднородных оптических сред, начавшиеся с 60-х годов XX в., дали предпосылки для создания ГрОЭ — линз со сферическими поверхностями и качеством aberrационной коррекции, соответствующим качеству коррекции элемента с АП. В первую очередь это относится к исправлению сферической aberrации, устранить которую возможно путем *изменения показателя преломления по поверхности*. Выполнить это требование можно изменением ПП как по оси  $OZ$  (ОРПП), так и по  $OY$  (РРПП):

$$n(z) = n_0 + n_{01}z + n_{02}z^2 + n_{03}z^3 + \dots;$$

$$n(y) = n_{00} + n_{10}y^2 + n_{20}y^4 + n_{30}y^6 + \dots.$$

В случае ОРПП функция показателя преломления по поверхности определяется производной от функции осевого распределения  $n(z)$ . Для линейного РПП — это коэффициент  $n_{01}$ , для полиномиального — это ряд  $(n_{01} + 2n_{02}t + 3n_{03}t^2 + \dots)$ , где  $t$  — глубина градиентной зоны ПП.

Для того чтобы показатель преломления по поверхности ГрОЭ изменялся в пределах всего светового диаметра, необходимо обеспечить неоднородность ПП в зоне, глубиной не менее стрелки прогиба поверхности,  $t \geq a_{1,2}$  ( $a_1$ ,  $a_2$  — стрелки прогиба первой и второй поверхностей линзы).

В теории aberrаций градиентных ОС существуют зависимости, позволяющие определять параметры осевого и радиального коррекционных РПП, обеспечивающих исправление сферической aberrации в линзе. При использовании ОРПП исходными расчетными данными являются коэффициент сферической aberrации  $S_1$  исход-

ной однородной линзы или значение продольной сферической аберрации, подлежащей исправлению.

Для первой поверхности линзы при нормировке  $h_1 = f'$ :

$$S_1 = -h_1^4 K_1, \quad K_1 = \frac{(n_{01} + 2n_{02}a_1 + \dots)}{r_1^2}.$$

Переходим к канонической нормировке  $S_1 = S_{1k}$ :

$$S_{1k} = -h_1^3 K_1 = -f'^3 \frac{(n_{01} + 2n_{02}a_1 + \dots)}{r_1^2}$$

и находим значения коэффициентов  $n_{01}$  (первое приближение) и  $n_{02}$ ,  $n_{03}$ ... (второе приближение):

$$n_{01} + 2n_{02}a_1 + \dots = -\frac{S_{1k}r_1^2}{f'^3}.$$

Отметим, что в (4.11) отсутствует значение исходного показателя преломления  $n_{00}$ , а присутствует производная от функции ПП, характеризующая скорость изменения показателя преломления по поверхности линзы.

Если известно значение  $\Delta s'$  продольной сферической аберрации линзы, то коэффициенты  $n_{01}$ ,  $n_{02}$  можно определить как

$$n_{01} + 2n_{02}a_1 + \dots = 2\frac{\Delta s'}{f'^2} \left( \frac{r_1}{m} \right)^2,$$

где  $m$  — высота луча на поверхности.

Известно, что для положительной линзы продольная сферическая аберрация  $\Delta s' < 0$ , следовательно, в области первой поверхности показатель преломления должен быть убывающей функцией по оси  $OZ$ , что приводит к уменьшению ПП с увеличением высоты луча на поверхности линзы.

При наличии неоднородности ПП в области второй поверхности линзы и известном значении  $S_{1k}$  получаем

$$n_{01} + 2n_{02}a_1 = \frac{S_{1k}r_2^2}{f'^3},$$

если известно  $\Delta s'$ , то

$$n_{01} + 2n_{02}a_1 = -2\frac{\Delta s'}{f'^2} \left( \frac{r_2}{m} \right)^2.$$

В случае линейного ОРПП  $n_{02} = 0$ , тогда

$$n_{01} = -2 \frac{\Delta s'}{f'^2} \left( \frac{r_2}{m} \right)^2.$$

Для положительной линзы на второй поверхности  $n_{01} > 0$  независимо от знака  $r_2$ .

В п. 3.2 показано, что в описании реальных ОРПП обычно присутствуют линейный и квадратичный члены или член более высокой степени, например четвертой. При этом наибольший вклад в изменение ПП по оси и, следовательно, поверхности линзы обеспечивает линейный член РПП, т. е. коэффициент  $n_{01}$ .

В случае РРПП функция ПП, согласно (4.6), определяется коэффициентом  $n_{10}$ . При  $h_1 = f'$ :

$$S_I = - \left( h_1^4 \frac{4n_{10}}{r_1} - h_2^4 \frac{4n_{10}}{r_2} \right).$$

Переходим к канонической нормировке:

$$S_{Ik} = - \left( h_1^3 \frac{4n_{10}}{r_1} - h_2^3 \frac{4n_{10}}{r_2} \right).$$

Значения  $h_1, h_2$  для исходной однородной линзы можно получить, рассчитав первый параксиальный луч по формулам (3.6), (3.7). Принимать условие  $h_1 = h_2$  для линзы конечной толщины здесь некорректно, так как при  $r_1 \neq \infty$  высота луча на первой и второй поверхностях может существенно отличаться.

По коэффициенту аберрации  $S_{Ik}$  находим значение

$$n_{10} = - \frac{1}{4} \frac{S_{Ik}}{\left( \frac{h_1^3}{r_1} - \frac{h_2^3}{r_2} \right)},$$

которое не является окончательным и требует уточнения, поскольку не учтено влияние толщины ГрОСр. При этом параметрами оптимизации являются  $n_{10}$  и  $r_2$ , а оптимизируемыми функциями — сферическая аберрация  $\Delta s'$  и фокусное расстояние  $f'$  линзы. Между коэффициентами  $n_{10}$  и  $n_{01}$ , описывающими радиальное и осевое РПП для обеих поверхностей линзы, существует связь:

$$n_{10k} = \frac{n_{01k}}{4r_k}. \quad (4.12)$$

Для АП 2-го порядка и сферической поверхности с неоднородным по поверхности ПП имеются формулы связи коэффициентов  $b_k$ ,  $n_{01k}$ ,  $n_{10k}$ :

$$n_{01k} = \frac{b_k (n_{00} - 1)}{r_k}, \quad n_{10k} = \frac{b_k (n_{00} - 1)}{4r_k^2}, \quad k = 1, 2,$$

где  $b_k$  — коэффициент деформации поверхности, связанный с эксцентриситетом асферической поверхности выражением  $b_k = -e_k^2$ .

Из (4.12) делаем вывод, что для исправления сферической аберрации коррекционным РРПП требуется меньшее значение коэффициента  $n_{10}$  и, следовательно, меньший перепад ПП, чем у ОРПП.

### Вопросы для самопроверки

1. В чем отличие формы записи коэффициентов аберраций 3-го порядка по Сэндсу и Ланге?
2. В чем аналогичны выражения для коэффициентов аберраций 3-го порядка у асферического и градиентного оптических элементов?
3. В чем разница между асферизацией поверхности элемента и введением градиента в ПП оптического элемента с позиции их влияния на аберрации?



## 5. ГАУССОВА ОПТИКА ГРАДАНОВ. ТЕОРИЯ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ АБЕРРАЦИЙ ГРАДАНОВ

Стержневидный цилиндрический оптический элемент с плоскими (как правило) торцами и убывающим по параболической зависимости вдоль радиуса элемента показателем преломления (в первом приближении) — это **градан**. Главное его свойство — способность фокусировать пучки лучей. В зарубежной литературе подобный элемент называют *selfoc* (самофокусирующий).

Функцию РПП в градане задают зависимостями

$$n(y) = n_{00} + n_{10}y^2 + n_{20}y^4 + \dots \quad (5.1)$$

или

$$n^2(y) = n_{00}^2 \left( 1 - g^2 y^2 + h_4 (gy)^4 + h_6 (gy)^6 + h_8 (gy)^8 + \dots \right), \quad (5.2)$$

где  $n_{10} = -t^2 n_{00}/2$ .

При одинаковых степенях в уравнениях (5.1), (5.2) между коэффициентами существует связь:

$$\begin{aligned} n_{10} &= -\frac{1}{2} g^2 n_{00}; \\ n_{20} &= \frac{n_{00}}{2} \left( h_4 - \frac{1}{4} \right) g^4; \\ n_{30} &= \frac{n_{00}}{2} \left( h_6 + \frac{h_4}{2} - \frac{1}{8} \right) g^6; \\ n_{40} &= \frac{n_{00}}{2} \left[ h_8 + \frac{h_6}{2} - \frac{h_4}{8} (3 - 2h_4) - \frac{5}{64} \right] g^8, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где  $g \equiv t$  — константа распределения РПП, определяющая параксиальные характеристики ГроЭ.

## 5.1. Масштабные, апертурные и полевые характеристики градана

Характеристики градана удобно анализировать с помощью понятия *характеристические параметры* — это некоторые экстремальные значения оптических характеристик, определяемые параметрами ГрОС. К ним относятся минимальное фокусное расстояние и соответствующая ему осевая длина градана, а также максимальный апертурный угол. К числу характеристических параметров можно отнести константу распределения (фокусирующую константу) градиентной среды, равную

$$t = \sqrt{-2n_{10}/n_{00}}. \quad (5.4)$$

Характеристические значения фокусного расстояния и длины градана определяют из выражений

$$f'_0 = \frac{1}{n_{00}t}; \quad d_0 = \frac{\pi}{2t}.$$

Длину градана из угловой градусной меры  $d^\circ$  переводят в линейную  $d$  по формуле  $d = \frac{\pi d^\circ}{180t}$ .

Кардинальные параметры градана с плоскими торцами вычисляют как

$$f' = \frac{1}{nt \sin(td)}; \quad s'_H = \frac{\cos(td) - 1}{nt \sin(td)};$$

$$f = -\frac{1}{nt \sin(td)}; \quad s_H = -\frac{\cos(td) - 1}{nt \sin(td)}.$$

Линейное увеличение градана  $\beta_0$  и расстояние от выходного торца до изображения в прямом  $s'$  и обратном  $s$  ходе лучей находят из следующих равенств:

$$\beta_0 = \frac{1}{\cos(td) + \frac{s}{f'_0} \sin(td)} = \cos(td) - \frac{s'}{f'_0} \sin(td);$$

$$s' = \frac{s - f'_0 \operatorname{tg}(td)}{1 + \frac{s}{f'_0} \operatorname{tg}(td)}; \quad s = \frac{s' + f'_0 \operatorname{tg}(td)}{1 - \frac{s'}{f'_0} \operatorname{tg}(td)}. \quad (5.5)$$

Максимальные значения апертурного  $\sigma_{\max}$  и полевого  $\omega_{\max}$  углов градана с радиусом  $R$ :

$$\sigma_{\max} = \arctg \frac{R}{f'_0}; \quad \omega_{\max} = \arctg \frac{R}{f'_0},$$

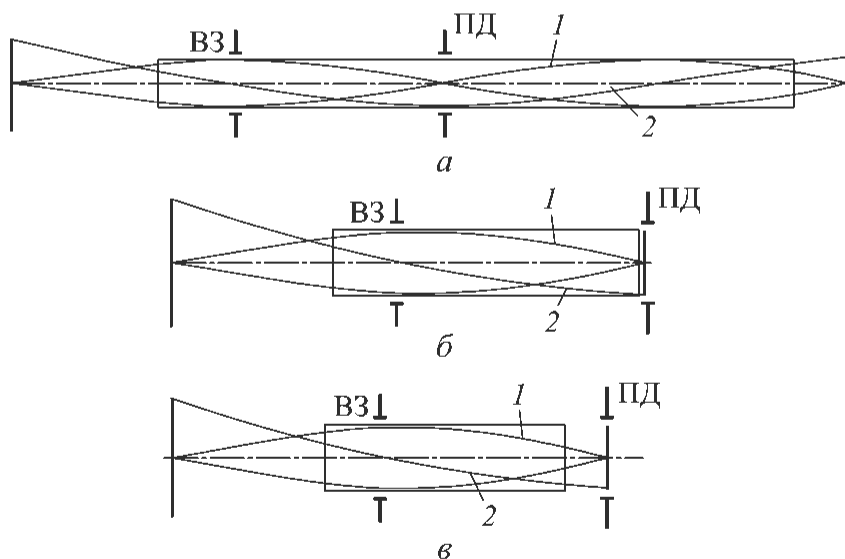
апертурный и полевой углы в пространстве предметов при расстоянии  $s$  до предмета равны

$$\tg \sigma = \frac{R}{f'_0 \sqrt{1 + \frac{s^2}{f_0'^2}}}; \quad \tg \omega = \frac{R}{f'_0 \sqrt{1 + \frac{f_0'^2}{s^2}}}. \quad (5.6)$$

Используя (5.6), можно вычислить размер предмета  $2y_{\max}$  и рабочий апертурный угол  $\tg \sigma'$  для заданного положения предмета  $s$ :

$$\tg \sigma' = \tg \sigma \left[ \cos(td) + \frac{s}{f'_0} \sin(td) \right];$$

$$2y_{\max} = 2s(\tg \omega).$$



**Рис. 5.1.** Траектория осевого 1 и главного внеосевого 2 лучей в градане различной длины:

*а* — длинный, ПД — в плоскости промежуточного изображения;  
*б* — средней длины, изображение на заднем торце градана, ПД — на выходной поверхности; *в* — короткий, промежуточное изображение внутри градана отсутствует, ПД — в плоскости изображения; ВЗ — входной зрачок

Положение полевой диафрагмы (ПД)  $z_{\text{пд}}$  при заданных положении предмета и длине градана определяют по наличию промежуточного (внутреннего) изображения (см. рис. 5.1, где показаны траектории лучей в длинном, среднем и коротком граданах):

$$z_{\text{пд}} = \frac{1}{t} \operatorname{arctg} \frac{s}{f'_0}. \quad (5.7)$$

Из формул (5.5), (5.7) следует, что плоскость промежуточного изображения является одновременно и плоскостью полевой диафрагмы.

Проверить правильность расчета полевого и апертурного углов градана в пространстве предметов (5.6) можно по формуле  $\frac{\operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg} \sigma} = \frac{s}{f'_0}$ .

## 5.2. Хроматическая aberrация положения градана

Для расчета хроматических aberrаций положения и увеличения используют дисперсионные зависимости ПП и константы распределения (КР) показателя преломления:

$$\begin{aligned} n(\lambda) &= B + \frac{C}{\lambda^2}; \\ t(\lambda) &= K_0 + \frac{K_1}{\lambda^2} + \frac{K_2}{\lambda^4}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где  $B, C, K_0, K_1, K_2$  — константы.

Типичные графики зависимостей  $n(\lambda)$  и  $t(\lambda)$  с нормальным ходом дисперсии приведены на рис. 3.1. Средние дисперсии  $\Delta n_{00}$  и  $\Delta t$  можно рассчитать с помощью (5.8). Дисперсию градиента ПП  $\Delta n_{10}$  определяют дифференцированием выражения (5.1) по длине волны  $\lambda$ :

$$\Delta n_{10\lambda 1\lambda 2} = -\frac{1}{2} t^2 \Delta n_{00} - n_{00} t \Delta t,$$

здесь и далее при расчете параметров реальных граданов дифференциалы  $dn, dt$  заменены конечными разностями  $\Delta n, \Delta t$ .

Коэффициенты дисперсии градиентной среды:

$$v_{00} = \frac{n_{00\lambda 0} - 1}{n_{00\lambda 1} - n_{00\lambda 2}}; \quad v_{10} = \frac{n_{10\lambda 0}}{n_{10\lambda 1} - n_{10\lambda 2}}.$$

Аналитическое значение дисперсии КР получают дифференцированием (5.3) по  $\lambda$ :

$$dt = -\frac{1}{t} \left( \frac{n_{00} dn_{10} - n_{10} dn_{00}}{n_{00}^2} \right). \quad (5.9)$$

Из (5.9) следует, что условием хроматической инвариантности КР  $dt/d\lambda = 0$  является равенство отношений градиента ПП к его базовому значению и их дисперсий:

$$\frac{n_{10}}{n_{00}} = \frac{\Delta n_{10}}{\Delta n_{00}}. \quad (5.10)$$

Выполнение условия (5.10) является желательным, поскольку в этом случае длина градана влияет на значение и знак хроматической аберрации положения. При  $dt/d\lambda \neq 0$  хроматическую аберрацию положения для удаленного положения предмета ( $s = -\infty$ ) рассчитывают как

$$\Delta s'_{xp} = -\frac{1}{[t n_{00} \operatorname{tg}(tl)]^2} \left[ \frac{n_{00} tl}{\cos^2(tl)} dt + t \operatorname{tg}(tl) dn_{00} + n_{00} \operatorname{tg}(tl) dt \right], \quad (5.11)$$

где  $l$  — длина градана ( $d \equiv l$ ).

Из анализа (5.11) следует, что при  $dt/d\lambda = 0$

$$\Delta s'_{xp} = -\frac{dn_{00}}{n_{00}} \frac{\cos(td)}{t n_{00} \sin(td)} = -\frac{dn_{00}}{n_{00}} s'_{F'}.$$

При выполнении условия (5.10) коэффициент дисперсии и продольную хроматическую аберрацию рассчитывают по формулам

$$v_{rp} = \frac{v_{10}}{\cos(td)}; \quad \Delta s'_{xp} = -\frac{f'}{v_{rp}},$$

т. е. коэффициент дисперсии зависит от длины градана. Выполнение условия  $dt/d\lambda = 0$  позволяет изменением длины градана получать отрицательную, нулевую или положительную хроматическую аберрацию положения при сохранении фокусного расстояния.

При  $s \neq \infty$  хроматическую аберрацию положения можно найти из формулы, полученной дифференцированием (5.5) по  $\lambda$ :

$$ds'_{xp} = \frac{A + B + C}{[1 + s t n_{00} \operatorname{tg}(tl)]^2},$$

где

$$A = \frac{dt}{\cos^2(tl)} \left( -\frac{l}{n_{00}t} - s^2 n_{00} tl \right);$$

$$B = (dn_{00}t + dt n_{00}) \left( \frac{\operatorname{tg}(tl)}{n_{00}^2 t^2} + \frac{s}{n_{00}t} \operatorname{tg}^2(tl) - s^2 \operatorname{tg}(tl) \right); \quad C = s \operatorname{tg}^2(tl) \left( \frac{dn_{00}}{n_{00}} + \frac{dt}{t} \right).$$

### 5.3. Коэффициенты монохроматических аберраций третьего порядка граданов

Проектирование визуальных и телевизионных приборов эндоскопического типа с использованием граданов в качестве базовых элементов оптической схемы базируется на теории монохроматических аберраций 3-го порядка.

Учтем, что в формулах (4.6), (4.7) для коэффициентов аберраций РПП является радиальной функцией, и получим форму записи коэффициентов аберраций для градиентных систем с элементами, имеющими РПП.

В общепринятых для коэффициентов аберраций 3-го порядка обозначениях, согласно (4.5), имеем

$$S_i = \bar{S}_{i,k} + \tilde{S}_{i,k},$$

где  $\bar{S}_{i,k}$  — поверхностная составляющая  $i$ -го коэффициента аберрации на  $k$ -й поверхности;  $\tilde{S}_{i,k}$  — составляющая  $i$ -го коэффициента аберрации в результате перехода луча через  $k$ -ю неоднородную среду.

При суммировании поверхностных составляющих коэффициенты  $\bar{S}_i$  записывают в виде сумм:

$$\begin{aligned} \bar{S}_I &= \sum_{k=1}^n (h_k P_k + K_k h_k^4); \\ \bar{S}_{II} &= \sum_{k=1}^n \left[ h_k P_k \left( \frac{\delta \beta_k}{\delta \alpha_k} \right) + K_k h_k^3 y_k \right]; \\ \bar{S}_{III} &= \sum_{k=1}^n \left[ h_k P_k \left( \frac{\delta \beta_k}{\delta \alpha_k} \right)^2 + K_k h_k^2 y_k^2 \right]; \\ \bar{S}_{IV} &= - \sum_{k=1}^n \frac{\delta \mu_k}{r_k}; \\ \bar{S}_V &= \sum_{k=1}^n \left\{ \left[ h_k P_k \left( \frac{\delta \beta_k}{\delta \alpha_k} \right)^2 + \frac{J^2}{h_k} \frac{\delta(\alpha_k n_k)}{n_k n_{k+1}} \right] \frac{\delta \beta_k}{\delta \alpha_k} + K_k h_k y_k^3 \right\}, \end{aligned} \tag{5.12}$$

где

$$K_k = \frac{4\delta n_{10k}}{r_k}; \quad P_k = \left( \frac{\delta\alpha_k}{\delta\mu_k} \right)^2 \delta\alpha_k \mu_k; \quad \delta\alpha_k = \alpha'_k - \alpha_k; \quad \delta\beta_k = \beta'_k - \beta_k; \quad \mu_k = n_k^{-1};$$

$$\begin{cases} J = -n_1(s - s_p)\alpha_1\beta_1 & \text{при } s \neq \infty, \\ J = -n_1h_1\beta_1 & \text{при } s = \infty, \end{cases}$$

$\alpha_k$ ,  $\beta_k$  и  $\alpha'_k$ ,  $\beta'_k$  — углы падения и преломления первого и второго вспомогательных лучей с оптической осью на  $k$ -й поверхности;  $h_k$ ,  $y_k$  — высоты указанных лучей на поверхности радиусом кривизны  $r_k$ ;  $K_k$  — коэффициент, учитывающий неоднородную природу граничащих сред.

Коэффициенты  $\tilde{S}_i$  перехода представлены интегральными выражениями по координате  $z$  — толщине (длине) градана,  $z = 0 \dots d$ :

$$\begin{aligned} \tilde{S}_I &= \sum_{k=1}^n [\Delta(n_{00,k} h_k \alpha_k^3) - \int (8n_{20,k+1} \bar{h}_{k+1}^4 + 4n_{10,k+1} \bar{h}_{k+1}^2 \bar{\alpha}_{k+1}^2 - n_{00,k+1} \bar{\alpha}_{k+1}^4) dz]; \\ \tilde{S}_{II} &= \sum_{k=1}^n \{ \Delta(n_{00,k} h_k \alpha_k^2 \beta_k) - \int [8n_{20,k+1} \bar{h}_k^3 \bar{y}_k + 2n_{10,k+1} \bar{h}_k \bar{\alpha}_k (\bar{h}_k \bar{\beta}_k + \bar{y}_k \bar{\alpha}_k) - \\ &\quad - n_{00,k+1} \bar{\alpha}_k^3 \bar{\beta}_k] dz \}; \\ \tilde{S}_{III} &= \sum_{k=1}^n [\Delta(n_{00,k} h_k \alpha_k \beta_k^2) - \int (8n_{20,k+1} \bar{h}_k^2 \bar{y}_k^2 + 4n_{10,k+1} \bar{h}_k \bar{y}_k \bar{\alpha}_k \bar{\beta}_k - \\ &\quad - n_{00,k+1} \bar{\alpha}_k^2 \bar{\beta}_k^2) dz]; \\ \tilde{S}_{IV} &= - \sum_{k=1}^n \frac{2n_{10,k+1} d_k}{n_{00,k+1}^2}; \\ \tilde{S}_V &= \sum_{k=1}^n \{ \Delta(n_{00,k} h_k \beta_k^3) - \int [8n_{20,k+1} \bar{h}_k \bar{y}_k^3 + 2n_{10,k+1} \bar{y}_k \bar{\beta}_k (\bar{h}_k \bar{\beta}_k + \bar{y}_k \bar{\alpha}_k) - \\ &\quad - n_{00,k+1} \bar{\alpha}_k \bar{\beta}_k^3] dz, \end{aligned} \tag{5.13}$$

где  $\bar{\alpha}_{k+1}$ ,  $\bar{\beta}_{k+1}$  и  $\bar{h}_{k+1}$ ,  $\bar{y}_{k+1}$  — функции углов и высот соответственно первого и второго вспомогательных лучей в градиентной среде;  $d_k$  — осевая толщина среды между поверхностями  $k$  и  $(k+1)$ ;  $\Delta$  — символ разности, отнесенный к толщине (длине) градана.

## 5.4. Аберрации третьего порядка короткого града-н-объектива

Рассмотрим градан длиной  $T/4$  с характеристиками  $n_{00}$ ,  $f' = f'_0$ ,  $t$ ,  $d = d_0$ ,  $D$  (диаметр града-н-а), которые назовем его *основными габаритными параметрами*. Величины  $f'_0$  и  $d_0$  также являются *характеристическими параметрами*. Длина града-н-а  $T$  в радианной мере равна  $2\pi$ . Для основных габаритных параметров справедливы соотношения

$$f_0 = \frac{1}{n_{00}t}, \quad d = \frac{\pi}{2t}, \quad T = \frac{2\pi}{t}.$$

Чтобы изучить аберрационные свойства града-нов, воспользуемся формулами (5.12), (5.13) при следующих условиях нормировки исходных значений вспомогательных лучей:  $h_1 = f'$ ;  $\alpha_1 = 0$ ;  $\beta_1 = 1$ .

Анализируя первичные аберрации града-нов, получаем ответ на ряд принципиальных вопросов, возникающих при проектировании приборов эндоскопического типа. Например, о необходимом пере-паде  $\Delta n$  показателя преломления для достижения максимального относительного отверстия града-н-а и прибора в целом, соответствующих значениях коэффициентов РПП для получения заданных аберраций 3-го порядка и соотношении аберраций 3-го и высших порядков при различных степенях полиномов РПП града-н-а.

**Сферическая аберрация.** Ход лучей и параметры первого и второго вспомогательных лучей приведены на рис. 5.2. Принятые обозначения:  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  — углы луча в пространстве предметов и на входе в гради-ентную среду;  $\bar{\alpha}_2$ ,  $\bar{h}_2$  — текущие угол и высота луча, определяемые расстоянием  $z$  от входной поверхности града-н-а;  $h_1$ ,  $h_2$  — высоты лучей на входной и выходной поверхностях града-н-а;  $s_p$  — положение входного зрачка.

Представим РПП полиномом четвертой степени:

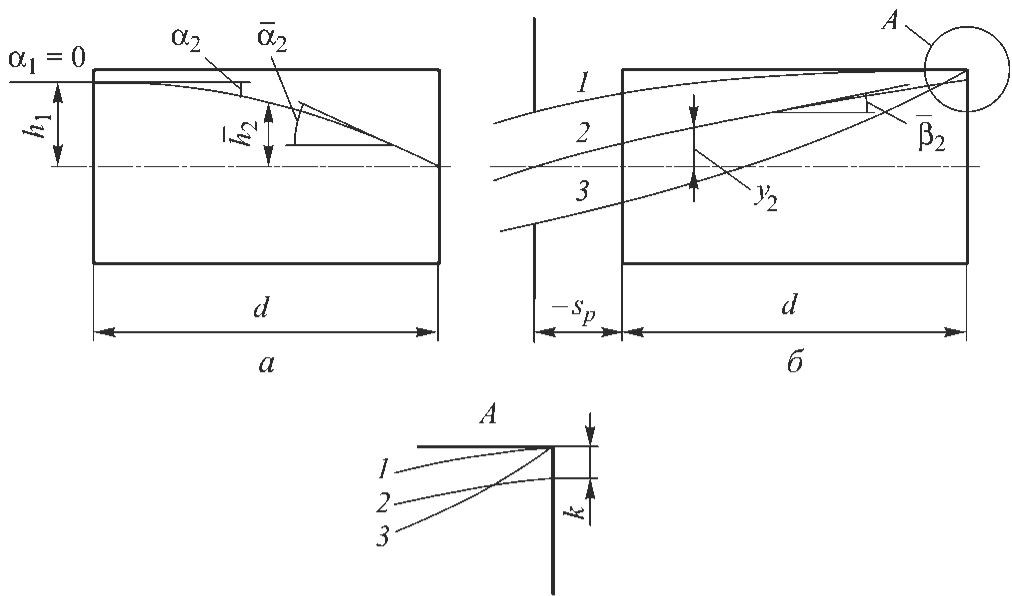
$$n(y) = n_{00} + n_{10}y^2 + n_{20}y^4 + \dots$$

Согласно (5.12), (5.13), коэффициент сферической аберрации  $S_1 = \bar{S}_1 + \tilde{S}_1$ , где

$$\bar{S}_1 = \sum_{k=1}^n (h_k P_k + K_k h_k^4), \quad (5.14)$$

$$K_k = \frac{4\delta n_{10,k}}{r_k}, \quad P_k = \left( \frac{\delta \alpha_k}{\delta \mu_k} \right)^2 \delta(\alpha_k \mu_k);$$





**Рис. 5.2.** Ход лучей осевого (а) и широкого наклонного (б) пучков в градане характеристической длины  $d$  при удаленном положении предмета:  $\alpha, \beta$  — углы первого и второго вспомогательных лучей;  $h, y$  — высоты этих же лучей относительно оптической оси; 1, 2, 3 — верхний, главный и нижний лучи широкоугольного наклонного пучка;  $r$  — абберация кома

$$\tilde{S}_1 = \sum_{k=1}^n [\Delta(n_{00,k} h_k \alpha_k^3) - \int (8n_{20,k+1} \bar{h}_{k+1}^4 + 4n_{10,k+1} \bar{h}_{k+1}^2 \bar{\alpha}_{k+1}^2 - n_{00,k+1} \bar{\alpha}_{k+1}^4) dz]. \quad (5.15)$$

Из (5.14), (5.15) следует, что градан обладает только интегральной составляющей  $\tilde{S}_1$ . Это несложно показать. Так, для параметров первого вспомогательного луча имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} h_2(z) &= \bar{h}_2 = h_1 \cos(tz); \\ \alpha_2(z) &= \bar{\alpha}_2 = h_1 t \sin(tz). \end{aligned} \quad (5.16)$$

В случае произвольного положения предмета поверхностную составляющую коэффициента сферической абберации определяют как

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 &= h_1 \left( \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\mu_2 - \mu_1} \right)^2 (\alpha_2 \mu_2 - \alpha_1 \mu_1) + \\ &+ K_1 h_1^4 + h_2 \left( \frac{\alpha_3 - \bar{\alpha}_2}{\mu_3 - \mu_2} \right)^2 (\alpha_3 \mu_3 - \bar{\alpha}_2 \mu_2) + K_2 h_2^4. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Для первой поверхности  $r_1 = \infty$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ,  $K_1 = 0$ ; для второй —  $r_2 = \infty$ ,  $h_2 = 0$ ,  $K_2 = 0$ . Отсюда, согласно (5.17), поверхностная составляющая  $\bar{S}_1 = 0$ .

При  $\alpha_2 = h_2 = 0$  первое слагаемое в (5.15) равно нулю:

$$\Delta(n_{00}h_k\alpha_k^3) = n_{00}(h_2\bar{\alpha}_2^3 - h_1\alpha_2^3) = 0.$$

Проинтегрировав (5.15) с учетом функций углов и высот (5.16), получим формулу в параметрах  $n_{00}$ ,  $n_{10}$ ,  $n_{20}$ ,  $t$ ,  $d$  для коэффициента сферической аберрации:

$$S_I = \frac{1}{2}h_1^4t^2d\left(n_{10} - \frac{3}{4}n_{00}t^2\right) - 3n_{20}h_1^4d. \quad (5.18)$$

Рассмотрим *параболическое* РПП ( $n_{20} = 0$ ). Подставляя в (5.18) выражение для константы распределения  $t$  в параметрах  $n_{00}$ ,  $n_{10}$  и учитывая нормировку  $h_1 = f'$  и знак коэффициента  $n_{10}$ , получаем формулы для коэффициента  $S_I$  и продольной сферической аберрации  $\Delta s'$ :

$$\begin{aligned} S_I &= \frac{5}{2} \frac{n_{10}^2}{n_{00}} f'^4 d_0; \\ \Delta s' &= -\frac{5}{4} \frac{m_1^2 n_{10}^2 f'^2 d_0}{n_{00}} \end{aligned} \quad (5.19)$$

или в характеристических параметрах

$$\Delta s' = -\frac{5}{32} \frac{\pi m_1^2}{f' n_{00}^2}, \quad (5.20)$$

где  $m_1$  — высота луча во входном зрачке.

Из (5.19), (5.20) следует, что градан с параболическим РПП, как и классическая линза с положительным фокусным расстоянием, имеет отрицательную продольную сферическую аберрацию. Перепад ПП в таком градане можно рассчитать следующим образом:

$$\Delta n = -\frac{1}{8n_{00}} \left( \frac{D}{f'} \right)^2. \quad (5.21)$$

Связь значения перепада со сферической аберрацией определим из выражений для параболического РПП и характеристического фокусного расстояния градана. Выразим  $D$  из (5.21) и подставим его в (5.19). Переход к диаметру градана позволяет определять сферическую аберрацию через  $\Delta n$ :

$$\Delta s' = -7,854 \left( \frac{\Delta n}{D} \right)^2 f'^3.$$

Также рассматриваемую абберацию как функцию  $\Delta n$  можно найти из формулы

$$\Delta s' = 0,982 f' \left( \frac{\Delta n}{n} \right) \quad (\Delta n < 0),$$

а при известном значении диаметра градана рассчитать как

$$\Delta s' = -0,347 \frac{D}{n} \sqrt{\left| \frac{\Delta n}{n} \right|},$$

$\Delta n$  берется по абсолютному значению.

Рассмотрим *полиномиальное* РПП ( $n_{20} \neq 0$ ). Преобразуем (5.18):

$$S_I = \frac{5}{2} \frac{n_{10}^2 f'^4 d}{n_{00}} - 3 n_{20} f'^4 d. \quad (5.22)$$

Сферическую абберацию градана можно представить суммой двух составляющих, определяемых коэффициентами  $n_{10}$ ,  $n_{20}$ :

$$\Delta s = \Delta s'_{n_{10}} + \Delta s'_{n_{20}},$$

т. е. подбором соответствующего значения коэффициента  $n_{20}$  находим желаемую сферическую абберацию 3-го порядка.

Рассчитаем продольную сферическую абберацию градана с учетом (5.22):

$$\Delta s' = -\frac{1}{2} m_1^2 f'^2 d \left( \frac{5}{2} \frac{n_{10}^2}{n_{00}} - 3 n_{20} \right). \quad (5.23)$$

Из (5.23) следует условие исправления сферической абберации 3-го порядка:

$$n_{20} = \frac{5}{6} \frac{n_{10}^2}{n_{00}}. \quad (5.24)$$

Если представить РПП градана полиномом  $n^2(y)$ , то получим следующее выражение в параметрах  $f'$  и  $h_4$  для сферической абберации:

$$\Delta s' = -\frac{\pi}{8} \frac{m_1^2}{f' n_{00}^2} (2 - 3 h_4) \quad (5.25)$$

или через диаметр градана

$$\Delta s' = -0,098 \frac{D}{f' n_{00}^2} (2 - 3h_4).$$

Из (5.25) делаем вывод, что  $h_4 = 2/3$  — условие исправления сферической аберрации в градане характеристической длины.

**Кома.** Ход лучей наклонного пучка приведен на рис. 5.2. Обозначим текущую высоту внеосевого луча в градане через  $\bar{y}_2$ , а его угол с оптической осью через  $\bar{\beta}_2$ . Формулы первого и второго вспомогательных лучей принимают вид

$$\begin{aligned} \bar{h}_2 &= h_1 \cos(td); \quad \bar{\alpha}_2 = h_1 t \sin(td); \\ \bar{y}_2 &= y_1 \cos(td) - \frac{\beta_2}{t} \sin(td); \quad \bar{\beta}_2 = \beta_2 \cos(td) + y_1 t \sin(td). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Согласно (4.6), (4.7), коэффициент аберрации комы равен сумме двух составляющих  $S_{\Pi} = \bar{S}_{\Pi} + \tilde{S}_{\Pi}$ , где

$$\bar{S}_{\Pi} = \sum_{k=1}^n [h_k P_k \left( \frac{\delta \beta_k}{\delta \alpha_k} \right) + K_k h_k^3 y_k], \quad (5.27)$$

$$K_k = \frac{4\delta n_{10,k}}{r_k}, \quad P_k = \left( \frac{\delta \alpha_k}{\delta \mu_k} \right)^2 \delta \alpha_k \mu_k,$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\Pi} &= \sum_{k=1}^n \{ \Delta(n_{00,k} h_k \alpha_k^2 \beta_k) - \int [8n_{20,k+1} \bar{h}_k^3 \bar{y}_k + 2n_{10,k+1} \bar{h}_k \bar{\alpha}_k (\bar{h}_k \bar{\beta}_k + \bar{y}_k \bar{\alpha}_k) - \\ &\quad - n_{00,k+1} \bar{\alpha}_k^3 \bar{\beta}_k] dz \}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Можно показать, что при  $r_1 = r_2 = \infty$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ,  $h_2 = 0$  коэффициент  $\bar{S}_{\Pi} = 0$ . Анализ первого слагаемого в (5.28) показывает, что оно также равно нулю.

*Параболический РРПП* ( $n_{20} = 0$ ). Подставляем (5.26) в (5.27) и далее интегрируем в пределах  $z = 0 \dots d$ :

$$\bar{S}_{\Pi n_{10}} = h_1^3 \left[ n_{10} \frac{y_1 t^2 d}{2} - n_{00} \left( \frac{t^2 \beta_2}{4} + \frac{3}{8} t^4 y_1 d \right) \right]. \quad (5.29)$$

Используя формулу связи между  $t$ ,  $n_{10}$  и учитывая принятые условия нормировки, перепишем (5.29):

$$\bar{S}_{\Pi n_{10}} = -f'^3 \left( \frac{5 s_p n_{10}^2 d}{2 n_{00}} - \frac{1 n_{10}}{2 n_{00}} \right), \quad (5.30)$$

где  $s_p = y_1$ , так как  $\beta_1 = 1$ .

Из (5.30) видно, что положение входного зрачка  $s_p$  является параметром для исправления комы.

**Полиномиальный РПП** ( $n_{20} \neq 0$ ). Интегрируем в (5.28) слагаемое, обусловленное коэффициентом  $n_{20}$ , и переходим к обозначению  $y_1 = s_p$ :

$$S_{\Pi n_{20}} = f'^3 n_{20} \left( 3s_p d + \frac{1}{n_{10}} \right).$$

Коэффициент  $S_{\Pi}$  — сумма двух слагаемых  $S_{\Pi} = S_{\Pi n_{10}} + S_{\Pi n_{20}}$ , следовательно

$$S_{\Pi} = f'^3 \left( -\frac{5 s_p n_{10}^2 d}{2 n_{00}} + \frac{n_{10}}{2 n_{00}} + 3s_p n_{20} d + \frac{n_{20}}{n_{10}} \right).$$

Если входной зрачок расположен на входном торце градана, то  $s_p = 0$  и выражение для коэффициента  $S_{\Pi}$  упрощается:

$$S_{\Pi} = f'^3 \left( \frac{n_{10}}{2 n_{00}} + \frac{n_{20}}{n_{10}} \right). \quad (5.31)$$

Из (5.31) делаем вывод, что кома будет постоянна и неисправима в случае параболического РПП градана при положении входного зрачка на входном торце. Исправление комы возможно при полиномиальном РПП и значении коэффициента  $n_{20}$ , определяемом как

$$n_{20} = -\frac{1 n_{10}^2}{2 n_{00}}. \quad (5.32)$$

Заменяя  $n_{20}$  в (5.32) через  $h_4$  по формуле (5.3), получим значение, при котором в градане длиной  $d_0$  обеспечивается исправление комы:  $h_4 = 0$ .

**Астигматизм.** Коэффициент астигматической разности  $S_{\text{III}}$  для градана в воздухе равен  $S_{\text{III}} = \bar{S}_{\text{III}} + \tilde{S}_{\text{III}}$ :

$$\bar{S}_{\text{III}} = \sum_{k=1}^n \left[ h_k P_k \left( \frac{\delta \beta_k}{\delta \alpha_k} \right)^2 + K_k h_k^2 y_k^2 \right], \quad (5.33)$$

$$K_k = \frac{4\delta n_{10,k}}{r_k}, \quad P_k = \left( \frac{\delta \alpha_k}{\delta \mu_k} \right)^2 \delta(\alpha_k \mu_k);$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\text{III}} = \sum_{k=1}^n [ \Delta(n_{00,k} h_k \alpha_k \beta_k^2) - \int (8n_{20,k+1} \bar{h}_k \bar{y}_k^2 + 4n_{10,k+1} \bar{h}_k \bar{y}_k \bar{\alpha}_k \bar{\beta}_k - \\ - n_{00,k+1} \bar{\alpha}_k^2 \bar{\beta}_k^2) dz. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Формулы вспомогательных лучей аналогичны (5.26). При  $r_1 = r_2 = \infty$  первое слагаемое в (5.34) равно нулю и  $\bar{S}_{\text{III}} = 0$ . Подставляем (5.26) в (5.34), интегрируем и получаем выражение для коэффициента астигматической разницы:

$$\begin{aligned} S_{\text{III}} = -f'^2 n_{20} \left( 3y_1^2 d - \frac{4h_1^2 y_1 \beta_2}{t^2} + \frac{h_1^2 \beta_2^2 d}{t^2} \right) - f'^2 n_{10} \left( \frac{y_1^2 t^2 d}{2} - \frac{\beta_2^2 d}{2} \right) + \\ + f'^2 n_{00} \left( \frac{t^2 \beta_2^2 d}{8} + \frac{t^2 \beta_2 y_1}{2} + \frac{3}{8} t^4 y_1^2 d \right). \end{aligned}$$

Выразим константу распределения  $t$  через коэффициент  $n_{10}$  РПП и заменим  $h_1, y_1$  соответственно на  $f', s_p$ :

$$\begin{aligned} S_{\text{III}} = -f'^2 n_{20} \left( 3s_p^2 d + \frac{2s_p}{n_{10}} - \frac{d}{2n_{00}n_{10}} \right) + f'^2 n_{10} \left( \frac{d}{2n_{00}^2} + \frac{s_p^2 n_{10} d}{n_{00}} \right) - \\ - f'^2 n_{00} \left( \frac{n_{10} d}{4n_{00}^3} + \frac{s_p n_{10}}{n_{00}^2} - \frac{3}{2} \frac{n_{10}^2 s_p^2 d}{n_{00}^2} \right). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Преобразовав (5.35) с заменой коэффициента  $n_{10}$  через  $n_{00}$  и  $f'$ , находим удобную для анализа формулу

$$S_{\text{III}} = \frac{5\pi}{16} \frac{s_p^2}{n_{00}^2 f'} + \frac{s_p}{2n_{00}^2} - \frac{\pi}{16} \frac{f'}{n_{00}^2} - f'^3 n_{00} n_{20} \left( \frac{3}{2} \pi s_p^2 - 4s_p f' + \frac{\pi}{2} f'^2 \right). \quad (5.36)$$

Для параболического профиля РПП из (5.36) получим квадратное уравнение относительно  $s_p$ :

$$s_p^2 \left( \frac{5\pi}{16} \frac{1}{n_{00}^2 f'} \left( + \frac{s_p}{2n_{00}^2} - \frac{\pi}{16} \frac{f'}{n_{00}^2} - S_{\text{III}} \right) \right) = 0. \quad (5.37)$$

Из (5.37) следует, что существует два положения входного зрачка, при которых астигматическая разность в градане отсутствует:

$$s_{p1} = 0,259 f'; \quad s_{p2} = -0,769 f'.$$

В случае полиномиального РПП при положении входного зрачка на первом торце градана  $s_p = 0$  и выражение для  $S_{\text{III}}$  преобразуется к виду

$$S_{\text{III}} = -\frac{\pi}{16} \frac{f'}{n_{00}^2} - f'^5 \frac{\pi}{2} n_{00} n_{20}. \quad (5.38)$$

По (5.38) можно судить, что исправление астигматизма достигается при  $n_{20} = -\frac{1}{8f'^4 n_{00}^3}$ , или

$$n_{20} = -\frac{1}{2} \frac{n_{10}^2}{n_{00}}. \quad (5.39)$$

При параболическом РПП и  $s_p = 0$  астигматизм неустраним и коэффициент  $S_{\text{III}}$  вычисляется как  $S_{\text{III}} = -\frac{\pi}{16} \frac{f'}{n_{00}^2}$ .

В общем случае при  $n_{20} \neq 0$  и  $s_p \neq 0$  астигматизм можно исправить, если

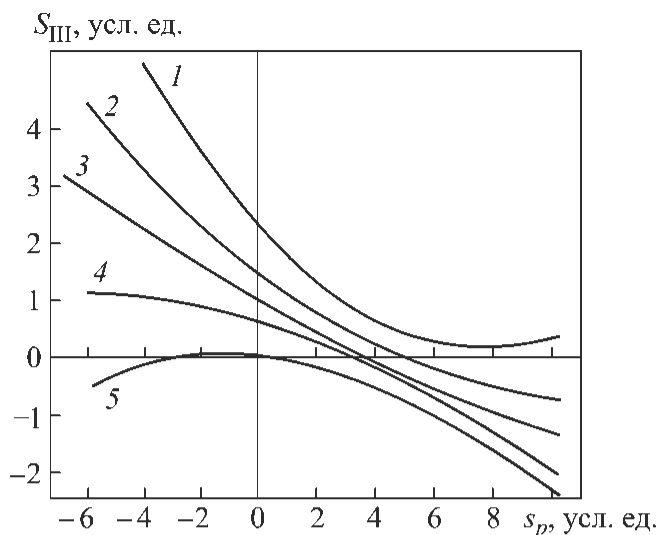
$$n_{20} = \frac{5\pi s_p^2 + 8s_p f' - \pi f'^2}{8f'^4 n_{00}^3 (3\pi s_p^2 - 8s_p f' + \pi f'^2)}. \quad (5.40)$$

В (5.39) заменим  $n_{20}$  на  $h_4$ , используя (5.3). Получим выражение для коэффициента  $h_4$ , при котором в градане отсутствует астигматизм:  $h_4 = 0$ .

Исследование влияния на астигматизм  $S_{\text{III}}$  коэффициента  $n_{20}(h_4)$  при изменении положения входного зрачка  $s_p$  показало, что его расположение справа от переднего торца является оптимальным для исправления астигматизма и коэффициент  $n_{20}(h_4)$  следует использовать для оптимизации сферической аберрации, а положение зрачка для оптимизации астигматизма. На рис. 5.3 изображены графики зависимости коэффициента астигматизма  $S_{\text{III}}$  градана ( $n_{00} = 1/5$ ;  $f' = 10$  мм,  $d = 23,56$  мм,  $g = 0,0667$  мм<sup>-1</sup>) от положения входного зрачка  $s_p$  при изменении коэффициента  $n_{20}(h_4)$  в диапазоне  $-\frac{1}{2} \frac{n_{10}^2}{n_{00}} < n_{20} < \frac{5}{6} \frac{n_{10}^2}{n_{00}}$  ( $0 < h_4 < 2/3$ ).

**Кривизна поля.** Коэффициент кривизны поля  $S_{\text{IV}}$ , согласно (4.5), представляют в виде суммы двух слагаемых  $S_{\text{IV}} = \bar{S}_{\text{IV}} + \tilde{S}_{\text{IV}}$ , где

$$\bar{S}_{\text{IV}} = -\sum_1^2 \frac{\delta \mu_k}{r_k}; \quad \mu_k = \frac{1}{n_k}; \quad \tilde{S}_{\text{IV}} = -\frac{2n_{10}d}{n_{00}^2}.$$



**Рис. 5.3.** Графики зависимости коэффициента астигматизма  $S_{III}$  градана от положения входного зрачка  $s_p$  при изменении коэффициента  $n_{20}(h_4)$ : линии 1–5 соответствуют  $h_4 = 0,67; 0,452; 0,317; 0,183; 0,0475$

При плоских торцах градана  $r_1 = r_2 = \infty$ ,  $\bar{S}_{IV} = 0$ . Выразим  $n_{10}$  и  $d$  через основные габаритные параметры, тогда

$$S_{IV} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{f' n_{00}^2}. \quad (5.41)$$

При  $f'_0 = 1$  из (5.41) получим выражение для основного параметра градана:

$$\Pi = \frac{1,57}{n_{00}^2}.$$

Кривизна поля Петцваля  $Z'_p$  для углового поля  $\omega$  определяется из формулы

$$Z'_p = -0,785 \frac{f'}{n_{00}^2} \operatorname{tg}^2 \omega.$$

**Дисторсия.** Коэффициент дисторсии  $S_v$ , согласно (4.5), состоит из суммы двух слагаемых:  $S_v = \bar{S}_v + \tilde{S}_v$ ,  
где



$$\bar{S}_V = \sum_{k=1}^n \left\{ \left[ h_k P_k \left( \frac{\delta \beta_k}{\delta \alpha_k} \right)^2 + \frac{J^2}{h_k} \frac{\delta(\alpha_k n_k)}{n_k n_{k+1}} \right] \frac{\delta \beta_k}{\delta \alpha_k} + K_k h_k y_k^3 \right\}, \quad (5.42)$$

$$K_k = \frac{4\delta n_{10,k}}{r_k}, \quad P_k = \left( \frac{\delta \alpha_k}{\delta \mu_k} \right)^2 \delta(\alpha_k \mu_k);$$

$$\tilde{S}_V = \sum_{k=1}^n [\Delta(n_{00,k} h_k \beta_k^3) -$$

$$- \int [8n_{20,k+1} \bar{h}_k \bar{y}_k^3 + 2n_{10,k+1} \bar{y}_k \bar{\beta}_k (\bar{h}_k \bar{\beta}_k + \bar{y}_k \bar{\alpha}_k) - n_{00,k+1} \bar{\alpha}_k \bar{\beta}_k^3] dz, \quad (5.43)$$

$J$  — инвариант Лагранжа—Гельмгольца.

В данном случае определяемая по (5.42) составляющая  $\bar{S}_V$  отлична от нуля и вычисляется как

$$\bar{S}_V = h_1 \left( \frac{1}{n_{00}^2} - 1 \right), \quad (5.44)$$

также и первое слагаемое в (5.43) не равно нулю:

$$\Delta(n_{00,k} h_k \beta_k^3) = -\frac{f'}{n_{00}^2}. \quad (5.45)$$

С учетом (5.44), (5.45) и принятых условий нормировки параметров вспомогательных лучей ( $h_1 = f'$ ,  $y_1 = s_p$ ) имеем

$$\tilde{S}_V = f'(-1 + s_p^3 \left( \frac{5}{2} \frac{n_{10}^2}{n_{00}} d - 3n_{20} d \right) + s_p^2 \left( 3 \frac{n_{20}}{n_{10}} + \frac{3}{2} \frac{n_{10}}{n_{00}} \right) + s_p \left( \frac{3}{2} d \frac{n_{20}}{n_{00} n_{10}} - \right.$$

$$\left. - \frac{5}{4} \frac{n_{10}}{n_{00}^2} d \right) + \frac{n_{20}}{2n_{10}^2 n_{00}} + \frac{1}{4n_{00}^2}). \quad (5.46)$$

Анализ (5.46) показывает, что зависимость  $S_V$  относительно  $s_p$  представлена кубическим уравнением и при положении входного зрачка вблизи первой поверхности

$$S_V = -f' \left[ 1 - \frac{n_{20}}{2n_{00} n_{10}^2} - \frac{1}{4n_{00}^2} \right]. \quad (5.47)$$

Для параболического профиля РПП  $S_V = f' \left[ \frac{1}{4n_{00}^2} - 1 \right]$ .

Из (5.47) получаем условие ортоскопии изображения при положении входного зрачка на переднем торце градана:

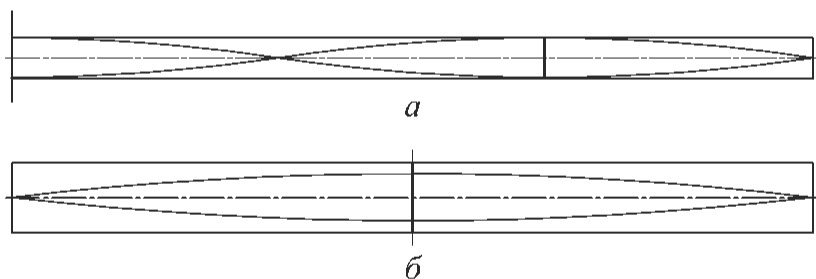
$$n_{20} = 2n_{00}n_{10}^2 - \frac{1}{2} \frac{n_{10}^2}{n_{00}}. \quad (5.48)$$

Если РПП задается полиномом  $n^2(y)$ , то условие ортоскопии изображения следующее:  $h_4 = n_{00}^2$ .

### 5.5. Аберрации третьего порядка градана-объектива увеличенной длины и градана-транслятора изображения

Градан-объектив увеличенной длины — это градан толщиной (длиной) более  $d_0$ , который строит изображение удаленного объекта в плоскости выходного торца. В таком одиночном функциональном ГрОЭ выделяются отрезки, выполняющие функции первичного объектива и переноса изображения на выходной торец ГрОЭ.

Схемы двух вариантов длинного градана приведены на рис. 5.4: *а* — предмет расположен на значительном удалении от первой поверхности (градан-объектив увеличенной длины); *б* — предмет находится на первой поверхности градана (градан-транслятор изображения).



**Рис. 5.4.** Схемы градана-объектива увеличенной длины (*а*) и градана-транслятора изображения (*б*)

**Градн-объектив.** Рассмотрим аберрации представленного на рис. 5.4, *а* градана, который можно рассматривать как элемент, состоящий из объектива длиной  $d_0$  и ряда оборачивающих систем, имеющих длины, равные  $T/2$ .

**Сферическая аберрация.** Коэффициент сферической аберрации  $S_1$  определяется выражениями (5.14), (5.15) с учетом увеличения длины градана на значение, кратное  $T/2$ . Вычислив определенный интеграл в (5.15) с учетом формул углов и высот первого параксиального луча

(5.16) и подставив их в формулу для сферической аберрации, находим продольную сферическую аберрацию

$$\Delta s'_I = -\frac{1}{2} m^2 f'^2 d_0 q \left( \frac{5}{2} \frac{n_{10}^2}{n_{00}} - 3n_{20} \right),$$

где  $q$  — число длин  $d_0$ , укладываемых на полной длине градана.

Отметим, что при значении коэффициента  $n_{20}$ , вычисленном по (5.24), происходит полное исправление сферической аберрации 3-го порядка.

**Кома.** С помощью (5.12), (5.13), учитывая связи параметров  $n_{10}$  и  $f'$ ,  $d = qd_0$ , определим

$$S_{II} = f'^3 \left( -\frac{5}{2} \frac{s_p n_{10}^2 d}{2 n_{00}} + \frac{n_{10}}{2 n_{00}} + 3 s_p n_{20} d + \frac{n_{20}}{n_{10}} \right). \quad (5.49)$$

Из (5.49) следует, что при  $s_p = 0$  коэффициент  $S_{II}$  не зависит от длины градана и равен значению для градана длиной  $d_0$ . При  $s_p \neq 0$  существует зависимость коэффициента  $S_{II}$  от длины градана  $d$  и удаления входного зрачка  $s_p$ . В этом случае кому 3-го порядка длинного градана можно исправить подбором значения коэффициента  $n_{20}$ : если его определять по (5.24), то при длине  $d = qd_0$  градан будет свободен от комы.

**Астигматизм.** Преобразуем выражения (5.33), (5.34) длинного градана с  $d = qd_0$  и получим формулу, аналогичную (5.35):

$$S_{III} = -f'^2 n_{20} \left( 3 s_p^2 d + \frac{2 s_p}{n_{10}} - \frac{d}{2 n_{00} n_{10}} \right) + f'^2 n_{10} \left( \frac{d}{2 n_{00}^2} + \frac{s_p^2 n_{10} d}{n_{00}} \right) - f'^2 n_{00} \left( \frac{n_{10} d}{4 n_{00}^3} + \frac{s_p n_{10}}{n_{00}^2} - \frac{3}{2} \frac{n_{10}^2 s_p^2 d}{n_{00}^2} \right). \quad (5.50)$$

Проанализировав (5.50), делаем вывод, что при положении входного зрачка на первой поверхности и длине градана  $d = qd_0$  значение  $S_{III}$  увеличивается в  $q$  раз. Если  $s_p = 0$ , то можно найти такое значение  $n_{20}$ , при котором астигматизм отсутствует.

Таким образом, при  $n_{20}$ , определяемом формулой (5.39), и положении входного зрачка на переднем торце длинного градана-объектива астигматизм отсутствует.

**Кривизна поля.** Коэффициент  $S_{IV}$  находим по (5.13), где  $d = qd_0$ . При увеличении длины градана на целое число полудлин периодич-

ности значение  $S_{\text{IV}}$  увеличивается кратно  $q$  и, следовательно, кривизну поля в градане с плоскими торцами исправить нельзя.

**Дисторсия.** Коэффициент  $S_V$  при увеличении длины на целое число полупериодов сохраняет вид, как в формуле (5.46), в которую входят слагаемые, содержащие в качестве сомножителей длину элемента  $d$  и положение входного зрачка  $s_p$ . Поэтому при  $s_p = 0$  дисторсия длинного градана-объектива равна дисторсии градана длиной  $d_0$ .

При  $s_p \neq 0$  решаем уравнение (5.50) относительно  $s_p$  и определяем положение входного зрачка, при котором градан имеет заданное значение коэффициента  $S_V$ .

**Градан-транслятор изображения.** Такой градан является аналогом двухкомпонентной оборачивающей системы с параллельным ходом лучей между компонентами. Градан длиной  $T/2$  с телецентрическим ходом главного луча приведен рис. 5.4, б. При переносе изображения с входного торца на выходной и длине градана  $d = T/2$  линейное увеличение составляет  $(-1)$ .

Выражения для углов и высот первого вспомогательного луча при  $h_1 = 0$ :

$$\begin{aligned}\bar{h}_2 &= h_1 \cos(tz) - \frac{\alpha_2}{t} \sin(tz) = -\frac{\alpha_2}{t} \sin(tz); \\ \bar{\alpha}_2 &= \alpha_2 \cos(tz) + h_1 t \sin(tz) = \alpha_2 \cos(tz),\end{aligned}\tag{5.51}$$

для второго вспомогательного луча  $\beta_2 = 0$ :

$$\begin{aligned}\bar{y}_2 &= y_2 \cos(tz) - \frac{\beta_2}{t} \sin(tz) = y_2 \cos(tz); \\ \bar{\beta}_2 &= \beta_2 \cos(tz) + y_1 t \sin(tz) = y_1 t \sin(tz).\end{aligned}$$

**Сферическая абберация.** Коэффициент сферической абберации  $S_I = \bar{S}_I + \tilde{S}_I$ , где  $\bar{S}_I$  — вклад поверхностей;  $\tilde{S}_I$  — вклад неоднородности среды. Поскольку  $h_1 = h_2 = 0$ , можно показать, что  $\bar{S}_I = 0$ . Следовательно, коэффициент  $S_I$  зависит только от вклада неоднородной среды:

$$\begin{aligned}\tilde{S}_I &= \Delta(n_{00} h_k \alpha_k^3) - \int_0^d (8n_{20} \bar{h}_k^4 + 4n_{10} \bar{h}_k^2 \bar{\alpha}_k^2 - n_{00} \bar{\alpha}_k^4) dz = \\ &= \int_0^d (8n_{20} \bar{h}_k^4 + 4n_{10} \bar{h}_k^2 \bar{\alpha}_k^2 - n_{00} \bar{\alpha}_k^4) dz.\end{aligned}\tag{5.52}$$

В (5.52) слагаемое  $\Delta(n_{00}h_k\alpha_k^3)=0$ , так как  $h_1=h_2=0$ .

Рассмотрим отдельно интегрирование каждого слагаемого формулы (5.52) после подстановки в нее выражений (5.51).

$$\begin{aligned}
 \int_0^d 8n_{20}\bar{h}_k^4 dz &= 8n_{20} \int_0^d \left( -\frac{\alpha_2}{t} \right)^4 \sin^4(td) dz = 8n_{20} \frac{\alpha_2^4}{t^5} \int_0^d \sin^4(td) d(zt) = \\
 &= 8n_{20} \frac{\alpha_2^4}{t^5} \left( \frac{3td}{8} - \frac{\sin(2td)}{4} + \frac{\sin(4td)}{32} \right) = 3n_{20} \frac{\alpha_2^4}{t^4} d; \\
 \int_0^d 4n_{10}\bar{h}_k^2 \bar{\alpha}_k^2 dz &= 4n_{10} \int_0^d \left( \frac{\alpha_2}{t} \right)^2 \sin^2(td) \alpha_2^2 \cos^2(td) dz = \\
 &= 4n_{10} \frac{\alpha_2^4}{t^3} \int_0^d \sin^2(td) \cos^2(td) d(zt) = 4n_{10} \frac{\alpha_2^4}{t^3} \frac{1}{8} \left( td - \frac{\sin(4td)}{4} \right) = \frac{1}{2} n_{10} \frac{\alpha_2^4}{t^2} d; \\
 \int_0^d n_{00} \bar{\alpha}_k^4 dz &= \frac{n_{00}}{t} \int_0^d \alpha_2^4 \cos^4(td) d(zt) = \frac{n_{00} \alpha_2^4}{t} \left( \frac{3td}{8} + \frac{\sin(2td)}{4} + \frac{\sin(4td)}{32} \right) = \\
 &= \frac{3}{8} n_{00} \alpha_2^4 d.
 \end{aligned}$$

В результате

$$\tilde{S}_I = -3n_{20} \frac{\alpha_2^4}{t^4} d + \frac{1}{2} n_{10} \frac{\alpha_2^4}{t^2} d - \frac{3}{8} n_{00} \alpha_2^4 d = \frac{5}{8} n_{00} \alpha_2^4 d - \frac{3}{4} n_{20} \left| \frac{n_{00}}{n_{10}} \right|^2 \alpha_2^4 d. \quad (5.53)$$

Из (5.53) следует условие, обеспечивающее в градане-трансляторе исправление сферической абберации 3-го порядка ( $S_I = \tilde{S}_I = 0$ ):

$$n_{20} = \frac{5}{6} \frac{n_{10}^2}{n_{00}}. \quad (5.54)$$

Сравнение (5.24) и (5.54) показывает, что исправление сферической абберации в градане-объективе и градане-трансляторе достигается при выполнении одного и того же условия для коэффициента  $n_{20}$ .

**Кома.** Согласно (5.12), (5.13), коэффициент комы — это сумма вкладов от преломления лучей на поверхности  $\bar{S}_{II}$  и прохождения лучей через неоднородную среду  $\tilde{S}_{II}$ :  $S_{II} = \bar{S}_{II} + \tilde{S}_{II}$ ,

где

$$\bar{S}_{\Pi} = \sum_{k=1}^n [h_k P_k \left( \frac{\delta \beta_k}{\delta \alpha_k} \right) + K_k h_k^3 H_k], \quad K_k = \frac{4\delta n_{10,k}}{r_k}; \quad P_k = \left( \frac{\delta \alpha_k}{\delta \mu_k} \right)^2 \delta(\alpha_k \mu_k);$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\Pi} = & \sum_{k=1}^n \{ \Delta(n_{00,k} h_k \alpha_k^2 \beta_k) - \\ & - [8n_{20,k+1} \bar{h}_k^3 \bar{y}_k + 2n_{10,k+1} \bar{h}_k \bar{\alpha}_k (\bar{h}_k \bar{\beta}_k + \bar{y}_k \bar{\alpha}_k) - n_{00,k+1} \bar{\alpha}_k^3 \bar{\beta}_k] dz \}. \end{aligned}$$

Поскольку  $h_1 = h_2 = 0$ , то  $\bar{S}_{\Pi} = 0$  и  $\Delta(n_{00} h_k \alpha_k^2 \beta_k) = 0$ .

Проинтегрируем выражения для  $\tilde{S}_{\Pi}$  с учетом (5.51):

$$8n_{20} \int_0^d \bar{h}_k^3 \bar{y}_k dz = 8n_{20} \int_0^d \left( -\frac{\alpha_2}{t} \right)^3 \sin^3(tz) y_1 \cos(tz) d(tz) = -8n_{20} \frac{\alpha_2^3 y_1}{t^3} \left( \frac{\sin^4(td)}{4} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} & 2n_{10} \int_0^d \bar{h}_k \bar{\alpha}_k (\bar{h}_k \bar{\beta}_k + \bar{y}_k \bar{\alpha}_k) dz = \\ & = 2n_{10} \int_0^d \left( -\frac{\alpha_2}{t} \right) \sin(tz) \alpha_2 \cos(tz) \left[ -\frac{\alpha_2}{t} \sin(tz) y_1 \sin(tz) + \right. \\ & + y_1 \cos(tz) \alpha_2 \cos(tz) \left. \right] dz = -2n_{10} \frac{\alpha_2^2}{t^2} \alpha_2 y_1 \left[ \int_0^d \sin(tz) \cos^3(tz) d(tz) - \right. \\ & \left. - \int_0^d \sin^3(tz) \cos(tz) d(tz) \right] = 0, \end{aligned}$$

$$\text{так как } \int_0^d \sin(tz) \cos^3(tz) d(tz) = \left( \frac{1}{4} - \frac{\cos^4(td)}{4} \right) = 0 \text{ и}$$

$$\int_0^d \sin^3(tz) \cos(tz) d(tz) = \frac{\sin^4(td)}{4} = 0, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} n_{00} \int_0^d \bar{\alpha}_k \bar{\beta}_k dz &= n_{00} \int_0^d \alpha_2^3 \cos^3(tz) y_1 t \sin(tz) dz = n_{00} \alpha_2^3 y_1 t \int_0^d \cos^3(tz) \sin(tz) dz = \\ &= n_{00} \alpha_2^3 y_1 \left( \frac{1}{4} - \frac{\cos^4(td)}{4} \right) = 0. \end{aligned}$$

В результате получим, что у градана-транслятора с увеличением  $(-1)$  коэффициент  $S_{\Pi} = 0$  независимо от значения  $n_{20}$ . Следовательно, такой градан при телецентрическом ходе главных лучей наклонных световых пучков свободен от аберрации кома.

**Астигматизм.** Общее выражение для  $S_{\text{III}}$  аналогично (5.33), (5.34):

$$S_{\text{III}} = \bar{S}_{\text{III}} + \tilde{S}_{\text{III}};$$

$$\bar{S}_{\text{III}} = \sum_{k=1}^n [h_k P_k \left( \frac{\delta \beta_k}{\delta \alpha_k} \right)^2 + K_k h_k^2 y_k^2], \quad K_k = \frac{4\delta n_{10,k}}{r_k}, \quad P_k = \left( \frac{\delta \alpha_k}{\delta \mu_k} \right)^2 \delta \alpha_k \mu_k;$$

$$\tilde{S}_{\text{III}} = \sum_{k=1}^n [\Delta(n_{00,k} h_k \alpha_k \beta_k^2) -$$

$$- \int (8n_{20,k+1} \bar{h}_k^2 \bar{y}_k^2 + 4n_{10,k+1} \bar{h}_k \bar{y}_k \bar{\alpha}_k \bar{\beta}_k - n_{00,k+1} \bar{\alpha}_k^2 \bar{\beta}_k^2) dz]. \quad (5.55)$$

Поскольку  $h_1 = h_2 = 0$ , то поверхностный вклад  $\bar{S}_{\text{III}} = 0$  и  $\Delta(n_{00} h_k \alpha_k \beta_k^2) = 0$ .

Интегрируем (5.55) по частям, учитывая (5.51):

$$8n_{20} \int_0^d \bar{h}_k^2 \bar{y}_k^2 dz = 8n_{20} \frac{\alpha_2^2}{t^3} y_1^2 \int_0^d \sin^2(tz) \cos^2 dz =$$

$$= 8n_{20} \frac{\alpha_2^2}{t^3} H_1^2 \left( \frac{td}{8} - \frac{\sin(4td)}{32} \right) = n_{20} H_1^2 \frac{\alpha_2^2 d}{t^2};$$

$$4n_{10} \int_0^d \bar{h}_k \bar{y}_k \bar{\alpha}_k \bar{\beta}_k dz = 4n_{10} \int_0^d \left[ \left( -\frac{\alpha_2}{t} \right) \sin^2(tz) y_1^2 t \cos^2(tz) \alpha_2 \right] dz =$$

$$= -4n_{10} \alpha_2^2 y_1^2 \frac{1}{t} \int_0^d \sin^2(tz) \cos^2(tz) d(tz) = -\frac{1}{2} n_{10} \alpha_2^2 y_1^2 d;$$

$$n_{00} \int_0^d \bar{\alpha}_k^2 \bar{\beta}_k^2 dz = n_{00} \int_0^d \alpha_2^2 \cos^2(tz) y_1^2 t^2 \sin^2(tz) dz =$$

$$= n_{00} \alpha_2^2 y_1^2 t \int_0^d \cos^2(tz) \sin^2(tz) d(tz) = \frac{1}{8} n_{00} \alpha_2^2 y_1^2 t^2 d.$$

В результате находим

$$\tilde{S}_{\text{III}} = n_{20} y_1^2 \frac{\alpha_2^2 d}{t^2} - \frac{1}{2} n_{10} \alpha_2^2 y_1^2 d - \frac{1}{8} n_{00} \alpha_2^2 y_1^2 t^2 d. \quad (5.56)$$

Приравниваем  $\bar{S}_{\text{III}} = 0$ , из (5.56) определяем значение  $n_{20}$ , при котором астигматизм градана-транслятора равен нулю.

Анализ рассмотренных выражений позволяет сделать выводы: при параболическом РПП коэффициент  $\tilde{S}_{\text{III}} \neq 0$ , следовательно, в ГрОЭ будет присутствовать астигматизм; при полиномиальном РПП

равенство  $n_{20} = -\frac{1}{2} \frac{n_{10}^2}{n_{00}}$  является условием исправления астигматизма,

как у градана-объектива характеристической длины с входным зрачком, расположенном на первом торце элемента.

**Кривизна поля.** Коэффициент кривизны поля — это сумма двух слагаемых:  $S_{IV} = \bar{S}_{IV} + \tilde{S}_{IV}$ , где

$$\bar{S}_{IV} = -\sum_1^2 \frac{\delta \mu_k}{r_k}; \quad \mu_k = \frac{1}{n_k}; \quad \tilde{S}_{IV} = -\frac{2n_{10}d}{n_{00}^2}. \quad (5.57)$$

Поскольку оба торца градана — плоские поверхности, то  $\bar{S}_{IV} = 0$  и коэффициент кривизны, согласно (5.57), зависит только от составляющей  $\tilde{S}_{IV}$ . Выразим  $\tilde{S}_{IV}$  в параметрах характеристического фокусного расстояния:

$$\tilde{S}_{IV} = \frac{\pi}{f' n_{00}^2}. \quad (5.58)$$

Из (5.58) следует, что по сравнению с граданом-объективом длиной  $T/4$  значение коэффициента  $S_{IV}$  в градане-трансляторе возросло в 2 раза, следовательно, в нем абберация кривизны Петцваля неустраняема и возрастает пропорционально увеличению длины градана.

**Дисторсия.** В общем виде выражение для коэффициента  $S_V$  аналогично (5.41):  $S_V = \bar{S}_V + \tilde{S}_V$ ;

$$\begin{aligned} \bar{S}_V &= \sum_{k=1}^n \left\{ \left[ h_k P_k \left( \frac{\delta \beta_k}{\delta \alpha_k} \right)^2 + \frac{J^2}{h_k} \frac{\delta(\alpha_k n_k)}{n_k n_{k+1}} \right] \frac{\delta \beta_k}{\delta \alpha_k} + K_k h_k y_k^3 \right\}, \\ K_k &= \frac{4\delta n_{10,k}}{r_k}, \quad P_k = \left( \frac{\delta \alpha_k}{\delta \mu_k} \right)^2 \delta \alpha_k \mu_k; \\ \tilde{S}_V &= \sum_{k=1}^n \{ \Delta(n_{00,k} h_k \beta_k^3) + \\ &+ \int [8n_{20,k+1} \bar{h}_k \bar{y}_k^3 + 2n_{10,k+1} \bar{y}_k \bar{\beta}_k (\bar{h}_k \bar{\beta}_k + \bar{y}_k \bar{\alpha}_k) - n_{00,k+1} \bar{\alpha}_k \bar{\beta}_k^3] \} dz. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Поскольку  $h_1 = h_2 = 0$  и  $\sum_1^2 \delta(\alpha_k \mu_k) = 0$ , то  $\bar{S}_V = 0$  и первое слагаемое в (5.59) тоже равно нулю.

Учитывая (5.51), проинтегрируем (5.59) по частям в пределах от  $z = 0 \dots d$ :

$$\begin{aligned} 8n_{20} \int_0^d \bar{h}_k \bar{y}_k^3 dz &= 8n_{20} \int_0^d (-\alpha_2/t) \sin(tz) y_1^3 \cos^3(tz) dz = \\ &= -8n_{20} \frac{\alpha_2}{t^2} y_1^3 \int_0^d \sin(tz) \cos^3(tz) d(tz) = -8n_{20} \frac{\alpha_2}{t^2} y_1^3 (1 - \cos^4(tz))/4 = 0; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
2n_{10} \int_0^d \bar{y}_k \bar{\beta}_k^2 \bar{h}_k dz &= 2n_{10} \int_0^d (-\alpha_2/t) \sin^2(tz) y_1^3 \cos(tz) t^2 \sin(tz) dz = \\
&= -2n_{10} y_1^3 \alpha_2 \int_0^d \cos(tz) \sin^3(tz) dz = -2n_{10} y_1^3 \alpha_2 [\sin^4(tz)]/4 = 0; \\
2n_{10} \int_0^d \bar{y}_k^2 \bar{\beta}_k^3 \alpha_k dz &= 2n_{10} \int_0^d t y_1^3 \sin(tz) \alpha_2 \cos^3(tz) dz = \\
&= 2n_{10} y_1^3 \alpha_2 \int_0^d \cos^3(tz) \sin(tz) d(tz) = 2n_{10} y_1^3 \alpha_2 [(1 - \cos^4(tz))/4] = 0; \\
n_{00} \int_0^d \bar{\alpha}_k \bar{\beta}_k^3 dz &= n_{00} \int_0^d \alpha_2 \cos(td) y_1^3 t^3 \sin^3(tz) dz = \\
n_{00} \alpha_2 y_1^3 t^2 \int_0^d \sin^3(tz) \cos(tz) d(tz) &= n_{00} \alpha_2 y_1^3 t^2 (\sin^4(td)/4) = 0.
\end{aligned}$$

Как видим, все слагаемые выражения (5.59) равны нулю, следовательно, в градане при передаче изображения с увеличением  $\beta = -1$  дисторсия отсутствует.

Таким образом, при телецентрическом ходе главных лучей градан обладает свойством симметрии, обеспечивающей исправление комы и дисторсии, подобно симметричной однородной линзовой ОС. Сферическая aberrация, астигматизм и кривизна поля пропорциональны длине градана. Кривизна поля Петцваля неустранима, а сферическую aberrацию или астигматизм можно исправить выбором коэффициента  $n_{20}$ .

Расчет коэффициентов aberrаций коротких и длинных граданов-объективов позволил получить условия исправления сферической aberrации, комы, астигматизма, дисторсии. Кривизна поля неисправима, ее значение уменьшается для среды с увеличенным осевым показателем преломления  $n_{00}$ .

Формулы для коэффициентов  $n_{20}(h_4)$  полиномов, описывающих РПП граданов, при которых обеспечивается коррекция aberrаций 3-го порядка в коротком градане-объективе, а также в длинных граданах (объективе и трансляторе изображения) при телецентрическом ходе второго вспомогательного луча в пространстве изображений, приведены в табл. 5.1.

**Формулы для обеспечения коррекции aberrаций 3-го порядка**

Вид aberrаций	Формулы для коэффициентов	
	$n_{20}$	$h_4$
Сферическая	$(5n_{10}^2)/(6n_{00})$	2/3
Кома	$-n_{10}^2/(2n_{00})$	0
Астигматизм	$-n_{10}^2/(2n_{00})$	0
Кривизна поля	—	—
Дисторсия	$2n_{00}n_{10}^2 - n_{10}^2/(2n_{00})$	$n_{00}^2$

**5.6. Коэффициенты РПП реальных графанов**

Коэффициенты полиномиального РПП идеально фокусирующего графана определяют путем разложения в ряд функции  $\text{sech}(ty)$  или  $\text{sech}^2(gy)$ :

$$\begin{aligned}
 n(y) &= n_{00} \text{sech}(ty) = n_{00} \left( 1 - \frac{1}{2}(ty)^2 + \frac{5}{24}(ty)^4 - \frac{61}{720}(ty)^6 + \dots \right), \\
 n^2(y) &= n_{00}^2 \text{sech}^2(gy) = n_{00}^2 \left( 1 - (gy)^2 + \frac{2}{3}(gy)^4 - \frac{17}{45}(gy)^6 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{62}{315}(gy)^8 + \dots \right),
 \end{aligned} \tag{5.60}$$

где фокусирующие константы  $g$  и  $t$  тождественно равны.

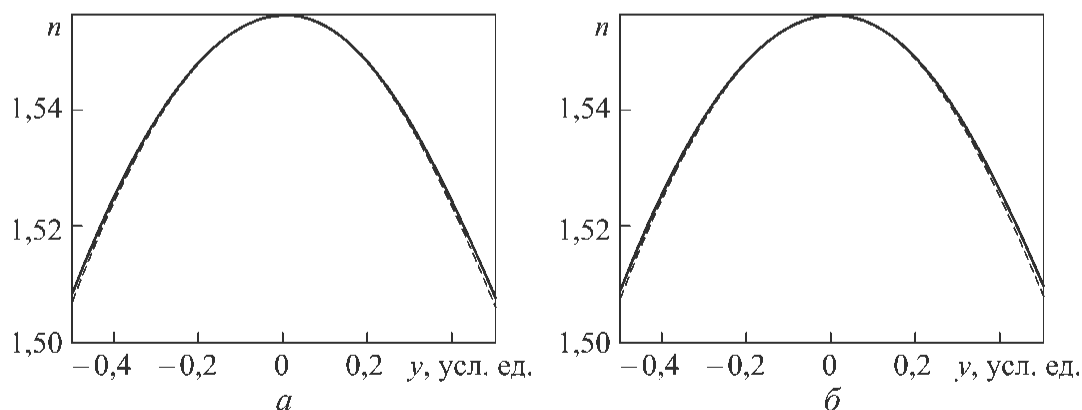
Достигнутый уровень технологии ионообменной диффузии не позволяет получить реальное РПП с коэффициентами ряда, одинаковыми с (5.60). Коэффициенты для реальных устройств обычно получают в результате математической обработки интерферограммы тонкого среза графана или графана длиной, близкой к  $\pi/g$ ; обычно используют полином (1.24):  $n^2(y)$ .

В табл. 5.2 помещены значения коэффициентов полиномов РПП в элементах *Selfoc*: SLS диаметрами 1,0; 1,5; 2,0 мм и SLW диаметрами 1,0; 1,5; 1,8; 2,0 мм.

**Коэффициенты полиномов РПП  
у различных элементов *Selfoc***

Обозначение элемента	$n_{00}$	$g, \text{ мм}^{-1}$	$h_4$	$h_6$	$h_8$	$d_0$	$f'_0$
SLS-10	1,556	0,506	0,7	0,0	60	3,104	1,270
SLS-15		0,333	0,8	-1,0	2	4,717	1,929
SLS-20		0,243	0,7	0,0	150	6,464	2,644
SLW-10	1,607	0,626	2,7	-21	-140	2,509	0,994
SLW-15		0,409	2,4	-13	-280	3,840	1,521
SLW-18		0,337	1,2	-10	-180	4,661	1,846
SLW-20		0,304	2,3	-20	-180	5,167	2,046

На рис. 5.5 приведены графики РПП граданов SLS-10 и SLW-10, а также идеального (гиперсекансного  $n^2(y)$ ) распределения с коэффициентами  $h_4 = 2/3$ ,  $h_6 = -17/45$ ,  $h_8 = 62/315$ . Из сравнения этих графиков следует, что граданы имеют функцию РПП, близкую к гиперболическому секансу, обеспечивающему исправление сферической аберрации.



**Рис. 5.5.** Распределение РПП элементов *Selfoc*: SLS-10 (а); SLW-10 (б); пунктирная линия — идеальное РПП  $n^2 = \text{sech}^2(gy)$

## Вопросы для самопроверки

1. Приведите формулы расчета фокусных расстояний и фокальных отрезков граданов.
2. Обоснуйте наличие и положение апертурной и полевой диафрагм в градане.
3. Назовите способы расчета хроматизма при положении предмета на конечном расстоянии от первого торца градана.
4. Дайте определение апертурного и полевого углов градана. Приведите их соотношение.
5. Получите условие исправления сферической аберрации 3-го порядка в линзе Микаэляна.
6. Как получить градан-объектив с заданным значением продольной сферической аберрации 3-го порядка?
7. Возможно ли исправление комы в линзе Микаэляна с параболическим типом РПП?
8. Приведите условие исправления астигматической разности 3-го порядка в линзе Микаэляна при положении входного зрачка на входном торце?
9. Можно ли исправить кривизну Петцваля в линзе Микаэляна?
10. При каком соотношении коэффициентов РПП можно исправить дисторсию 3-го порядка линзы Микаэляна при нахождении входного зрачка на входном торце?
11. Какие аберрации 3-го порядка отсутствуют в градане-трансляторе при телецентрическом ходе главного луча и линейном увеличении  $(-1)$ ?

## 6. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГРАДИЕНТНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ОБЛАСТИ АБЕРРАЦИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Градиентный оптический элемент со сферическими поверхностями — это линза, которая имеет дополнительный коррекционный параметр в виде регулярной неоднородности показателя преломления. В градиентной линзе по сравнению с аналогичной однородной присутствует дополнительный хроматический параметр — дисперсия градиента ПП, которую можно использовать для минимизации хроматизма одиночной линзы или более сложной ОС, например дублета.

### 6.1. Проектирование синглета и дублета с ОРПП

Зададим осевую неоднородность ПП зависимостью  $n(z) = n_0(\lambda) + n_{01}(\lambda)z + n_{02}(\lambda)z^2$ , где  $n_0(\lambda)$  — показатель преломления в начальной точке  $z = 0$ ;  $n_{01}(\lambda)$ ,  $n_{02}(\lambda)$  — хроматические абберационные коэффициенты. Оптическая ось совпадает с осью  $Z$  системы координат  $OXYZ$ , привязанной к вершине входной поверхности линзы.

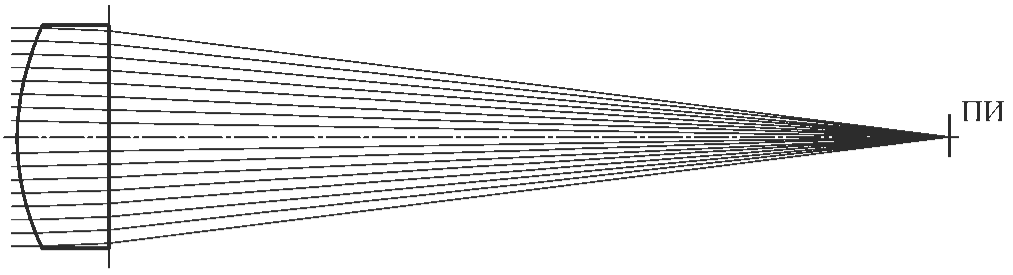
**Условие исправления сферической абберации в линзе с ОРПП.** В соответствии с (4.5), (4.6), (4.8) выражение для коэффициента сферической абберации  $S_1$  (рис. 6.1) в пределах осевой толщины линзы имеет вид

$$\bar{S}_1 = \bar{S}_{1.H} + \bar{S}_{1.G} + \tilde{S}_1,$$

где  $\bar{S}_{1.H}$ ,  $\bar{S}_{1.G}$  — однородно- и неоднородно-поверхностные составляющие;  $\tilde{S}_1$  — вклад переноса.

На начальном этапе проектирования считаем линзу тонкой и не принимаем во внимание вклад переноса.

Составляющие  $\bar{S}_{1.H}$ ,  $\bar{S}_{1.G}$  вычисляют при суммировании по поверхностям согласно формулам



**Рис. 6.1.** Ход лучей осевого пучка в выпукло-плоской линзе с ОРПП на всю толщину линзы:  
ПИ — плоскость изображения

$$\bar{S}_{I.H} = \sum hP, \quad P = \left( \frac{\delta\alpha}{\delta\mu} \right)^2 \delta(\alpha\mu); \quad \bar{S}_{I.G} = \sum \frac{\delta(n_{01} + 2n_{02}t)}{r^2} h^4,$$

где  $\delta\alpha = \alpha_{k+1} - \alpha_k$ ;  $\delta\mu = \mu_{k+1} - \mu_k$ ;  $\delta(n_{01} + 2n_{02}t)$  — разность градиентов ПП  $(k+1)$ - и  $k$ -сред, разделенных  $k$ -й поверхностью линзы;  $t$  — глубина зоны неоднородного ПП;  $\mu = 1/n_{00}$ ;  $\alpha$  — угол с оптической осью первого вспомогательного луча;  $h, r$  — высота луча и радиус кривизны оптической поверхности. Условия нормировки вспомогательного луча:  $\alpha_1 = 0$ ,  $h_1 = f'$ ,  $\alpha'_p = 1$ .

Для упрощения анализа будем считать РПП линейной функцией от  $z$  (при условии  $n_{02} = 0$ ). Очевидно, чтобы исправить сферическую aberrацию, не принимая во внимание составляющую вклада переноса,

нужно выполнить условие  $\sum_1^2 hP = -\sum_1^2 \frac{\delta n_{01}}{r^2} h^4$ .

Сферическая aberrация в одиночной линзе или дублете исправляется за счет введения неоднородности ПП в одной или обеих линзах.

При последовательном расположении в блоке однородной и градиентной сред, разделенных сферической поверхностью с радиусом кривизны  $r$ :

$$\bar{S}_{I.H} = -\frac{n_{01}}{r^2} h^4,$$

откуда

$$n_{01} = -\bar{S}_{I.H} \frac{r^2}{h^4}. \quad (6.1)$$

При переходе луча из градиентной в однородную среду

$$\bar{S}_{I.H} = \frac{n_{01}}{r^2} h^4, \quad n_{01} = \bar{S}_{I.H} \frac{r^2}{h^4}. \quad (6.2)$$

Таким образом, по значению коэффициента  $S_I = S_{I.H}$  исходной однородной системы с помощью (6.1) или (6.2) находим исходное значение коэффициента  $n_{01}$  линейного ОРПП, от которого зависит скорость изменения ПП по поверхности линзы в пределах ее светового диаметра. Это значение  $n_{01}$  далее уточняют с помощью экстраполяции по результатам расчета через ГрОС реальных лучей. Следует обратить внимание на то, что коэффициенты  $n_{01}$  определяют необходимое значение ( $n$ ) ПП на границе однородной и неоднородной оптических сред. Используя  $n_{01}$ , подбирают реальную ГрОСр с коэффициентом, наиболее близким к рассчитанному. Данный подход исправления сферической аберрации можно применять для ОС более сложных конструкций.

**Условие исправления хроматической аберрации положения одиночной линзы с ОРПП.** Для первого вспомогательного луча указанной линзы введем обозначения:  $\alpha_2, n_0, h_1$  и  $\bar{\alpha}_2, n_z, h_z$  — угол, показатель преломления и высота луча соответственно на входе в градиентную среду и выходе из нее.

Хроматическая функция ПП имеет вид  $n_\lambda(z) = n_{0,\lambda}(\lambda) + n_{01,\lambda}(\lambda)z$ .

На первой и второй поверхностях линзы

$$(dn_0) = n_{0\lambda 1} - n_{0\lambda 2}, \quad (dn_z) = n_{z\lambda 1} - n_{z\lambda 2},$$

где  $dn_0, dn_z$  — средние дисперсии ПП в начале ( $z = 0$ ) и конце ( $z = d$ ) ГрОСр.

Воспользуемся формулами (4.6), (4.8) для первого хроматического коэффициента:

$$S_{I_{0xp}} = - \left[ (\alpha_2 - \alpha_1) h_1 \frac{1}{v_0} + (\alpha_3 - \bar{\alpha}_2) h_2 \frac{1}{v_z} \right];$$

$$\tilde{S}_{I_{xp}} = \Delta(h \alpha dn_0) + \int_0^d \bar{\alpha}^2 (dn_0) dz. \quad (6.3)$$

Можно показать, что у тонкой линзы интеграл в (6.3) для вклада переноса  $\tilde{S}_{I_{xp}}$  близок к нулю. Действительно, используем зависимость (3.7) для  $\bar{\alpha}_2(z)$ , тогда после интегрирования

$$\tilde{S}_{I_{xp}} = dn_0 \alpha_2^2 \left( \frac{n_0}{n_{01}} - \frac{n_0^2}{n_{01}n_0 + n_{01}^2 d_l} \right). \quad (6.4)$$

При малой толщине линзы  $d_l$  можно считать  $h_1 = h_2$ , а произведение  $n_{01}^2 d_l \approx 0$  и, значит, вклад переноса, рассчитанный по (6.4),  $\tilde{S}_{I_{xp}} = 0$ .

Отсюда следует, что в тонкой линзе параметрами исправления хроматизма положения являются коэффициенты дисперсии  $v_0$ ,  $v_z$  показателя преломления в начальной и конечной точках градиентной среды. Назовем их коэффициентами дисперсии на входной и выходной поверхностях линзы.

Первый хроматический коэффициент

$$S_{\text{Ixp}} = h_2 \bar{\alpha}_2 (dn_z) - h_1 \alpha_2 (dn_0) - \left[ h_1 \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)}{v_0} + h_2 \frac{\alpha_3 - \bar{\alpha}_2}{v_z} \right]. \quad (6.5)$$

В (6.5) выразим средние дисперсии  $dn_0$ ,  $dn_z$  через их коэффициенты дисперсии, тогда после преобразования

$$S_{\text{Ixp}} = \frac{h_2}{v_z} (\bar{\alpha}_2 n_z - \alpha_3) - \frac{h_1}{v_0} (\alpha_2 n_0 - \alpha_1), \quad (6.6)$$

где  $v_0 = \frac{n_{0\lambda 0} - 1}{n_{0\lambda 1} - n_{0\lambda 2}}$ ;  $v_z = \frac{n_{z\lambda 0} - 1}{n_{z\lambda 1} - n_{z\lambda 2}}$ .

Из условия исправления хроматической аберрации положения ( $S_{\text{Ixp}}$ ) находим соответствующее ему соотношение коэффициентов дисперсии и углов с оптической осью первого вспомогательного луча:

$$\frac{v_0}{v_z} = \frac{\alpha_2 n_0 - \alpha_1}{\bar{\alpha}_2 n_z - \alpha_3}. \quad (6.7)$$

Для однородной среды  $v_0 = v_z$ , отсюда следует известный вывод об конструкции линзы с исправленным хроматизмом положения:  $\alpha_1 = \alpha_3$  или  $r_1 = r_2$ , т. е. линза является афокальной.

Выражения (6.6), (6.7) показывают, что наличие дисперсии градиента ПП в некоторой степени расширяет возможность коррекции хроматической аберрации положения одиночной линзы. При ОРПП в прилегающей к поверхности линзы области форма линзы остается менисковой, но  $r_1 \neq r_2$ . Данное заключение можно распространить и на линзу с градиентом ПП только в области одной поверхности.

Рассмотрим градиентную линзу с линейным ОРПП, у которой  $\Phi_{1\text{пов}}$  и  $\Phi_{2\text{пов}}$  — оптические силы первой и второй поверхностей:

$$\Phi_{1\text{пов}} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{h_1}; \quad \Phi_{2\text{пов}} = \frac{\alpha_3 - \bar{\alpha}_2}{h_2}. \quad (6.8)$$

В этом случае формулу (6.5) для продольной хроматической аберрации положения можно записать как



$$ds'_{\text{xp}} = -\frac{1}{\alpha_3^2} \left( h_1 \left[ \frac{h_1}{v_0} \Phi_{1\text{пов}} + \frac{h_2}{v_z} \Phi_{2\text{пов}} \right] - d \frac{\bar{\alpha}_2}{v_z} \Phi_{2\text{пов}} h_2 \right). \quad (6.9)$$

У тонкой линзы  $d \approx 0$ ,  $h_1 = h_2$ , поэтому для нее в окончательном виде хроматическую aberrацию положения градиентной линзы можно представить формулой

$$ds'_{\text{xp}} = -\frac{1}{\alpha_3^2} h_1^2 \left( \frac{\Phi_{1\text{пов}}}{v_0} + \frac{\Phi_{2\text{пов}}}{v_z} \right). \quad (6.10)$$

Оптическая сила тонкой линзы  $\Phi$  равна сумме оптических сил поверхностей:

$$\Phi_{1\text{пов}} + \Phi_{2\text{пов}} = \Phi, \quad \Phi_{1\text{пов}} = \frac{n_0 - 1}{r_1}, \quad \Phi_{2\text{пов}} = \frac{1 - n_z}{r_2}.$$

С учетом принятых в (6.8)—(6.10) обозначений условие исправления хроматической aberrации положения в одиночной линзе с ОРПП выглядит так:

$$\left( \frac{n_0 - 1}{v_0 r_1} - \frac{n_z - 1}{v_z r_2} \right) = 0. \quad (6.11)$$

Из (6.11) находим требуемое соотношение радиусов кривизны, коэффициентов дисперсий и показателей преломления в вершинах поверхностей линзы, при выполнении которого обеспечивается условие исправления хроматической aberrации положения:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{v_z (n_0 - 1)}{v_0 (n_z - 1)}. \quad (6.12)$$

Формула (6.12) находится в согласии с (6.7). При известных параметрах градиентных сред исправление хроматизма положения возможно в узком диапазоне значений радиусов кривизны поверхностей одного знака, т. е. линза с исправленным хроматизмом положения должна быть мениском.

При известных параметрах исходной однородной линзы с помощью (6.10) находим значение коэффициента дисперсии на второй поверхности:

$$v_z = -\frac{v_0 \Phi_{2\text{пов}}}{\Phi_{1\text{пов}}}.$$

Для линейной зависимости ОРПП коэффициент дисперсии выходной поверхности линзы связан перепадом ПП  $\Delta n$  и коэффициентом дисперсии градиентной среды  $v_{01}$ :

$$v_z = \frac{(n_0 - 1 + \Delta n)v_1 v_{01}}{(n_0 - 1)v_{01} + \Delta n v_1}, \quad (6.13)$$

где  $v_{01} = \frac{n_{01\lambda 0}}{n_{01\lambda 1} - n_{01\lambda 2}}$ .

Значение  $v_{01}$ , при котором в линзе с ОРПП будет исправлена хроматическая aberrация положения, находим из выражения

$$v_{01} = -\frac{\Delta n(1 - n_z)\rho_2 v_1}{(n_0 - 1)[(n_0 - 1)\rho_1 + (1 - n_z)\rho_2] + \Delta n(n_0 - 1)\rho_1},$$

где  $\rho_1, \rho_2$  — кривизна первой и второй поверхностей;  $n_0, n_z$  — ПП в вершинах указанных поверхностей линзы.

Приведенные формулы — приближенные, их точность увеличивается с уменьшением толщины линзы.

**Хроматизм положения дублета из линз — однородной и с ОРПП.** Дублет представляют как блок из двух тонких линз, находящихся в соприкосновении. При наличии ОРПП в *первой* линзе и положении предмета на конечном расстоянии, равном  $-a_1$  от передней главной плоскости линзы, хроматическую aberrацию положения записывают в виде

$$ds'_{xp} = -a'_2 \left( \frac{\Phi_{1пов}}{v_0} + \frac{\Phi_{2пов}}{v_z} + \frac{\Phi_2}{v_2} \right), \quad (6.14)$$

где  $\Phi_{1пов}, v_0$  и  $\Phi_{2пов}, v_z$  — оптические силы и коэффициенты дисперсии соответственно первой и второй поверхностей первой линзы;  $\Phi_2, v_2$  — оптическая сила и коэффициент дисперсии второй линзы.

Для первой линзы

$$\Phi_{1пов} + \Phi_{2пов} = \Phi_1. \quad (6.15)$$

Подставим (6.15) в (6.14), учтем (6.13) и полученные ранее формулы для оптических сил:

$$ds'_{xp} = -a'_2 \left( \frac{n_0 - 1}{v_0 r_1} + \frac{1 - n_z}{v_z r_2} + \frac{\Phi_2}{v_3} \right). \quad (6.16)$$

Если предмет находится в бесконечности, то  $a'_2 = f'$  и (6.16) преобразуется:

$$ds'_{\text{xp}} = -f' \left( \frac{n_0 - 1}{v_0 r_1} - \frac{n_z - 1}{v_z r_2} + \frac{\Phi_2}{v_3} \right). \quad (6.17)$$

Из (6.17) следует условие исправления хроматической аберрации положения в рассматриваемом дублете:

$$\left( \frac{n_0 - 1}{v_0 r_1} - \frac{n_z - 1}{v_z r_2} + \frac{\Phi_2}{v_3} \right) = 0.$$

При наличии ОРПП во второй линзе блока и положении предмета на конечном расстоянии  $-a_1$  от передней главной плоскости первой линзы хроматическая аберрация положения

$$ds'_{\text{xp}} = -a'_2 \left( \frac{\Phi_1}{v_1} + \frac{\Phi_{2\text{пов}}}{v_{0,2\text{пов}}} + \frac{\Phi_{3\text{пов}}}{v_{z,3\text{пов}}} \right). \quad (6.18)$$

Для второй линзы блока  $\Phi_{2\text{пов}} + \Phi_{3\text{пов}} = \Phi_2$ , где

$$\Phi_{2\text{пов}} = \frac{n_0 - 1}{r_2}; \quad \Phi_{3\text{пов}} = \frac{1 - n_z}{r_3}. \quad (6.19)$$

Подставив (6.19) в (6.18), в окончательном виде получим

$$ds'_k = -a'_2 \left( \frac{\Phi_1}{v_1} + \frac{n_0 - 1}{v_{0,2\text{пов}} r_2} + \frac{1 - n_z}{v_{z,3\text{пов}} r_3} \right). \quad (6.20)$$

Если предмет находится в бесконечности, то в (6.20)  $a'_2 = f'$ :

$$ds'_k = -f' \left( \frac{\Phi_1}{v_1} + \frac{n_0 - 1}{v_{0,2\text{пов}} r_2} - \frac{n_z - 1}{v_{z,3\text{пов}} r_3} \right). \quad (6.21)$$

Из (6.21) получаем условие исправления хроматизма положения при наличии градиента ПП во *второй* линзе:

$$\left| \frac{\Phi_1}{v_1} + \frac{n_0 - 1}{v_{0,2\text{пов}} r_2} - \frac{n_z - 1}{v_{z,3\text{пов}} r_3} \right| = 0. \quad (6.22)$$

Известное условие исправления хроматизма положения в дублете из однородных тонких линз следующее:

$$(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\frac{1}{v_1}+\frac{\Phi_2}{v_2}=0 \text{ или } \frac{\Phi_1}{v_1}+\frac{\Phi_2}{v_2}=0.$$

Анализ (6.17), (6.22) показывает, что в дублете, включающем одну линзу однородную, а другую с ОРПП, дисперсия градиента показателя преломления является дополнительным параметром, влияющим на хроматическую aberrацию положения. Благодаря наличию в каталогах большого разнообразия стекол с различными значениями ПП и коэффициентами дисперсии, в блоке из двух линз существенно выше возможность исправления хроматизма положения, чем в одиночной градиентной линзе.

## 6.2. Проектирование линз с заданной кривизной поля изображения

Теория aberrаций 3-го порядка для оптической среды РРПП позволяет проводить анализ возможности исправления первичной кривизны поля (кривизны поля Петцваля) одиночной линзы, расположенной в воздухе.

Кривизна изображения в области трех порядков aberrаций будет отсутствовать (изображение будет плоским), если линза является мениском с поверхностями равной кривизны. Это следует из анализа формулы для коэффициента  $S_{IVe}$  при естественной нормировке исходных параметров первого и второго вспомогательных лучей:

$$S_{IVe} = -\sum_1^2 \frac{\Delta\mu_k}{r_k}, \quad (6.23)$$

где  $\mu_k = 1/n_k$ ;  $r_k$  — радиус кривизны поверхности линзы.

Для предмета и изображения в воздухе переход от естественной нормировки коэффициента кривизны поля к канонической осуществляется по формуле  $S_{IVk} = S_{IVe} f'$ . Если линза не является мениском с поверхностями одинаковой кривизны, то изображение в области Зейделя будет иметь кривизну, определяемую из выражения

$$\frac{1}{R_s} = -\frac{n'}{f'} S_{IVk} = -S_{IVe}.$$

Раскроем формулу (6.23) и получим для одиночной тонкой линзы

$$S_{IV} = \frac{1}{n}(n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Поскольку оптическая сила тонкой линзы равна  $\Phi = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$ , то

$$S_{IVe} = \Phi/n. \quad (6.24)$$

Из (6.24) следует, что в канонической нормировке коэффициент  $S_{IV} = S_{IVK}$  является величиной, обратной ПП линзы.

Для сложных многолинзовых компонентов, содержащих  $n$ -е количество линз, (6.24) записывается в виде

$$S_{IVe} = \sum_{k=1}^n \frac{\Phi_k}{n_k}, \quad (6.25)$$

где  $\Phi_k$  — оптическая сила  $k$ -й линзы.

Как следует из (6.25), для исправления кривизны поля необходимо присутствие в оптической схеме как положительных, так и отрицательных линз.

Покажем, что применение линз с РРПП создает предпосылки конструктивного упрощения компонента с исправленной первичной кривизной изображения. Из анализа формул (4.5)—(4.7): в линзе с РРПП для коэффициента аберрации кривизны поля можно получить требуемое значение  $S_{IVK}$ , в частности, равное нулю.

Как написано ранее в п. 4.2, коэффициент  $S_{IV}$  для градиентной линзы имеет две составляющие:

$$S_{IVe} = \bar{S}_{IVe} + \tilde{S}_{IVe}, \quad (6.26)$$

где  $\bar{S}_{IVe}$  — составляющая Зейделя, обусловленная показателем преломления и оптической силой однородной линзы;  $\tilde{S}_{IVe}$  — составляющая, обусловленная наличием РРПП.

Для ГрОЭ в случае тонкой линзы

$$\bar{S}_{IVe} = -\sum_1^2 \frac{\Delta\mu}{r_k} = \frac{n_{00}-1}{n_{00}}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right); \quad \tilde{S}_{IVe} = -\frac{2n_{10}d}{n_{00}^2}, \quad (6.27)$$

где  $n_{00}$  — ПП на оси линзы;  $n_{10}$  — коэффициент полинома ПП, определяющий фокусирующие свойства ГрОСр;  $d$  — осевая толщина линзы.

Линзу с РРПП можно представить в виде находящегося в воздухе компонента, состоящего из двух близко расположенных линз одинаковой толщины, причем первая линза — однородная с радиусами

кривизны  $r_1$ ,  $r_2$ , вторая — плоскопараллельная пластинка с РРПП (линза Вуда).

Из соотношений (6.26), (6.27) для линзы с РРПП с заданным значением  $S_{IV\epsilon}$  находим уравнение для разности кривизны поверхностей:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{S_{IV\epsilon} n_{00} + 2n_{10}d/n_{00}}{(n_{00} - 1)}. \quad (6.28)$$

Оптическую силу линзы с РРПП, согласно (3.6), можно рассматривать как сумму сил, обусловленных однородной и неоднородной составляющими показателя преломления:

$$\Phi = \bar{\Phi} + \tilde{\Phi}, \quad (6.29)$$

где

$$\bar{\Phi} = \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) (n_{00} - 1) + \frac{(n_{00} - 1)^2 d}{r_1 r_2 n_{00}}; \quad (6.30)$$

$$\tilde{\Phi} = -2n_{10}d. \quad (6.31)$$

После подстановки (6.30), (6.31) в (6.29) и алгебраических преобразований совместно с (6.28) получаем формулу для коэффициента  $n_{10}$ , при котором линза имеет заданные значения коэффициента  $S_{IV\kappa}$  и фокусного расстояния  $f'$ ,

$$n_{10} = \left[ \frac{(n_{00} - 1)}{r_1^2 n_{00}} - \frac{(f')^{-1}}{d(n_{00} - 1)} - \frac{S_{IV\kappa}}{f'} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{n_{00}}{d(n_{00} - 1)} \right) \right] / \left[ \frac{2}{n_{00}} + \frac{2d}{r_1 n_{00}^2} \right], \quad (6.32)$$

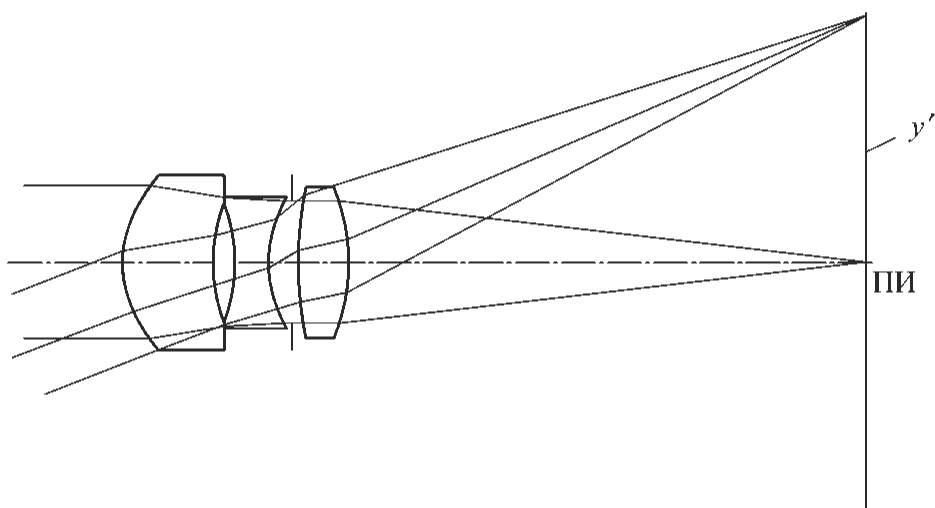
дающая первое приближение для получения нужного значения коэффициента кривизны изображения  $S_{IV\kappa}$  и точность (6.32) увеличивается с уменьшением толщины линзы.

В качестве *примера* рассмотрим описание конструктивных параметров и абберрационных характеристик, рассчитанных по предложенной методике, у положительного мениска с положительной средней кривизной изображения. Конструктивные параметры:  $r_1 = -4,356$  мм;  $r_2 = -3,5243$  мм;  $d = 1,55$  мм;  $D_{\text{зп}} = 1,6$  мм;  $n = 1,7849 + 0,0142y^2 + 0,0018y^4$ . Параксиальные характеристики:  $f' = 29,32$  мм;  $s'_{F'} = 34,50$  мм;  $\omega = 7^\circ$ ;  $s_p = 0$ . При расположении входного зрачка на первой поверхности линзы и угловом поле  $7^\circ$  коэффициенты РРПП

обеспечивают значения астигматических отрезков  $z'_m = 0,468$  мм,  $z'_s = 0,117$  мм. Это свидетельствует о наличии у линзы положительной средней кривизны изображения  $Z'_{cp} = 0,292$  мм, полученной при положительной оптической силе.

### 6.3. Проектирование объектива «Триплет» с градиентными линзами

Методика расчета объектива «Триплет» (рис. 6.2), включающего линзы с РРПП, незначительно отличается от методики Кингслика для однородного триплета.



**Рис. 6.2.** Оптическая схема объектива «Триплет»:  
 $y'$  — размер изображения

Исходная методика предполагает решение трех уравнений: для оптических сил трех тонких линз, коэффициентов хроматической аберрации положения и кривизны поля изображения (применяемая нормировка исходных параметров первого и второго вспомогательных лучей —  $h_1 = 1$ ,  $\alpha_7 = 1$ ,  $f' = 1$ ,  $\beta_1 = 1$ ):

$$\Phi_1 + h_2 \Phi_2 + h_3 \Phi_3 = \Phi; \quad (6.33)$$

$$\frac{\Phi_1}{v_1} + \frac{h_2 \Phi_2}{v_2} + \frac{h_3 \Phi_3}{v_3} = -S_{\text{Ixp}}; \quad (6.34)$$

$$\frac{\Phi_1}{n_1} + \frac{\Phi_2}{n_2} + \frac{\Phi_3}{n_3} = S_{\text{IV}}, \quad (6.35)$$

где  $h_i$  — высота первого вспомогательного луча на  $i$ -й линзе;  $\Phi_i$ ,  $n_i$  — оптическая сила и ПП  $i$ -й линзы;  $v_i$  — коэффициент Аббе;  $\Phi$  — общая оптическая сила системы;  $S_{\text{Ixp}}$  — коэффициент хроматической аберрации положения;  $S_{\text{IV}}$  — коэффициент кривизны поля изображения (кривизны Петцваля).

Для решения уравнений (6.33)—(6.35) необходимо задать первоначальные значения  $S_{\text{Ixp}}$ ,  $S_{\text{IV}}$  и выбрать значения для  $n_i$ ,  $v_i$ . Оптическая сила с учетом условий нормировки параметров лучей равна единице,  $\Phi = 1$ . Путем системного изменения высот  $h_2$ ,  $h_3$  получают семейства решений, одно из которых выбирают в качестве исходного для проведения оптимизации с учетом реальных аберраций.

Когда одна из линз триплета имеет РРПП, исходная методика несколько модифицируется. Задаем РРПП линзы в виде ряда  $n_\lambda(r) = n_{00,\lambda} + n_{10,\lambda}r^2 + n_{20,\lambda}r^4 + \dots$ , где  $r$  — расстояние от оптической оси до наружной цилиндрической поверхности линзы;  $n_{i0,\lambda}$  — постоянные коэффициенты, описывающие профиль ПП для отдельных длин волн.

Коэффициенты дисперсии одиночной линзы с РРПП определяют по формулам (3.21), (3.22):  $v_{i0} = \frac{n_{i0,\lambda 0}}{n_{i0,\lambda 1} - n_{i0,\lambda 2}}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , исключая слу-

чай  $i = 0$ , когда  $v_{00} = \frac{n_{00,\lambda 0} - 1}{n_{00,\lambda 1} - n_{00,\lambda 2}}$ .

В одиночной линзе с РРПП оптическая сила, первая хроматическая сумма  $S_{\text{Ixp}}$  и кривизна Петцваля приближенно определяются по зависимостям

$$\Phi = \bar{\Phi} + \tilde{\Phi}, \quad \bar{\Phi} = (n_{00,\lambda 0} - 1)(\rho_1 - \rho_2), \quad \tilde{\Phi} = -2n_{10,\lambda 0}d;$$

$$S_{\text{Ixp}} = -h^2 \left( \frac{\bar{\Phi}}{v_{00}} + \frac{\tilde{\Phi}}{v_{10}} \right);$$

$$S_{\text{IV}} = \frac{\bar{\Phi}}{n_{00,\lambda 0}} + \frac{\tilde{\Phi}}{(n_{00,\lambda 0})^2}.$$

Таким образом для триплета, в котором первая линза имеет РРПП, (6.33)—(6.35) преобразуются к следующим уравнениям:

$$(\bar{\Phi}_1 + \tilde{\Phi}_1) + h_2\Phi_2 + h_3\Phi_3 = \Phi; \tag{6.36}$$



$$\left( \frac{\bar{\Phi}_1}{v_{00,1}} + \frac{\tilde{\Phi}_1}{v_{10,1}} \right) + \frac{h_2^2 \Phi_2}{v_2} + \frac{h_3^2 \Phi_3}{v_3} = -S_{\text{Ixp}}; \quad (6.37)$$

$$\frac{\bar{\Phi}_1}{n_{00,1}} + \frac{\tilde{\Phi}_1}{(n_{00,1})^2} + \frac{\Phi_2}{n_2} + \frac{\Phi_3}{n_3} = S_{\text{IV}}. \quad (6.38)$$

Поскольку неизвестных переменных теперь четыре ( $\bar{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_1, \Phi_2, \Phi_3$ ), то вводим четвертое уравнение

$$\bar{\Phi}_1 + \tilde{\Phi}_1 = \Phi_1. \quad (6.39)$$

Чтобы решить систему из уравнений (6.36)—(6.39), следует выбрать определенные значения для  $\Phi_1, v_{10,1}$  в дополнение к указанным ранее значениям для  $h_2, h_3, \Phi, v_{00,1}, v_2, v_3, n_{00,1}, n_2, n_3, S_{\text{Ixp}}, S_{\text{IV}}$ .

Подобный набор уравнений получим и в случае, когда вторая линза триплета имеет РРПП:

$$\begin{aligned} \Phi_1 + h_2(\bar{\Phi}_2 + \tilde{\Phi}_2) + h_3 \Phi_3 &= \Phi; \\ \frac{\Phi_1}{v_1} + h_2^2 \left( \frac{\bar{\Phi}_2}{v_{00,2}} + \frac{\tilde{\Phi}_2}{v_{10,2}} \right) + \frac{h_3^2 \Phi_3}{v_3} &= -S_{\text{Ixp}}; \\ \frac{\Phi_1}{n_1} + \frac{\bar{\Phi}_2}{n_{00,2}} + \frac{\tilde{\Phi}_2}{(n_{00,2})^2} + \frac{\Phi_3}{n_3} &= S_{\text{IV}}; \\ \bar{\Phi}_2 + \tilde{\Phi}_2 &= \Phi_2. \end{aligned}$$

## Вопросы для самопроверки

1. В чем проявляется действие неоднородного ПП при выполнении им коррекционной функции?
2. При каком условии в линзе с ОРПП возможно пренебречь вкладом в коэффициент абберации, обусловленным прохождением луча по неоднородной среде?
3. В чем проявляется действие неоднородного ПП в линзе при выполнении им силовой функции? Назовите абберации, которые могут быть исправлены в этом случае.
4. В чем отличие методик проектирования объектива типа «Триплет» при использовании однородных и неоднородных оптических сред?

## Заключение

Математической основой проектирования оптических систем с ГрОЭ являются разработанные на основе решения лучевого уравнения компьютерные методы расчета траекторий реальных лучей в неоднородных средах. Теоретическая база — обобщенная теория первичных монохроматических и хроматических аберраций.

Различают *силовые* и *коррекционные* свойства ГрОСр. Первые из них, аналогично линзе со сферическими поверхностями, определяют параксиальные характеристики и первичные аберрации градиентного элемента, зависящие от его оптической силы. Градиентная среда может выполнять коррекционные функции, являясь с некоторым приближением (по действию на световой пучок) аналогом асферической поверхности, влияющей на аберрации линзы. Исправлению могут подлежать сферическая аберрация, кома, астигматизм, для которых важна конфигурация поверхностей линзы. В данном пособии рассмотрены методики расчета коэффициентов хроматической аберрации положения и сферохроматической аберрации линзы, представлена методика синтеза линзы с улучшенным исправлением сферохроматической аберрации за счет введения в приповерхностный слой оптического стекла с ОРПП. Для выполнения коррекционных функций в оптических системах могут быть использованы все три типа распределения показателя преломления — радиальное, осевое, сфероцентрическое.

Практическое применение ГрОСр с РРПП реализовано в создании граданов, соединяющих в физически одном элементе свойства одиночного и ряда функциональных элементов: объектива, объектива + транслятора изображений. Последний выполняет функцию переноса первичного изображения, созданного объективом, на требуемое расстояние, например в предметную плоскость окуляра.

Уникальным достоинством элементов со сферическими поверхностями, имеющими РРПП, является возможность исправления в фактически одиночной линзе неисправимой для однородных линз кривизны поля изображения. Теория аберраций 3-го порядка пока-

зывает, что как для однородной оптической среды, так и для градиентной линза с целью исправления кривизны поля должна иметь менискообразную конфигурацию поверхностей. В линзе с положительной оптической силой и РРПП можно получить положительную кривизну Петцваля, невозможную в традиционном однородном компоненте, где эта aberrация, как правило, отрицательная.

Теория хроматизма и предварительные расчеты показали, что дисперсионные характеристики среды с ОРПП позволяют влиять на высшие порядки сферохроматической aberrации. Теория первичных aberrаций (монохроматических и хроматических) и аналитические методы расчета простейших оптических конструкций, а также компьютерные методы расчета траекторий реальных лучей в неоднородных средах дают возможность выполнять компьютерное моделирование габаритных и aberrационных свойств оптических систем, включающих линзы с градиентом показателя преломления.

## Литература

### Основная

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1975.
2. Русинов М.М., Грамматин А.П., Иванов П.Д. и др. Вычислительная оптика: справочник / под ред. М.М. Русинова. Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1984.
3. Сушков А.Л. Монохроматические aberrации градиентов как базовых элементов жестких эндоскопов: учеб. пособие М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008.
4. Ильин В.Г., Карапетян Г.О., Косяков В.И. и др. Физические основы градиентной оптики: учеб. пособие. Л.: ЛПИ, 1990.
5. Проспект фирмы GO! Foton [Электрон. ресурс] <http://www.gofoton.com>

### Дополнительная

1. Инструкция по эксплуатации программы «Optics Software for Layout and Optimization (OSLO)». Корпорация Lambda Research Corporation, 2005. [Электрон. ресурс] <http://www.lambdares.com>
2. Handbook of Optical Systems, Edited by Herbert Gross. V.3: Aberration Theory and Correction of Optical Systems. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co.KGaA, 2007.
3. Проспект фирмы LightPath. [Электрон. ресурс] <http://www.LightPath.com>
4. Сушков А.Л. Исправление сферической aberrации третьего порядка в линзе введением неоднородностей показателя преломления // Изв. вузов. Приборостроение. 2010. Т. 53. № 5. С. 67—72.
5. Ровенская Т.С. Методы проектирования оптических систем с градиентными элементами: учеб. пособие. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1994.
6. Сушков А.Л. Параметры сфероконцентрического распределения показателя преломления в сферической и прямоугольной системах координат // Изв. вузов. Приборостроение. 2009. Т. 53. № 12. С. 54—60.
7. Сушков А.Л. Алгоритм расчета зейделевых aberrаций для оптической среды с распределенным показателем преломления // Изв. вузов. Приборостроение. 2012. Т. 55. № 5. С. 64—72.
8. Сушков А.Л. Исправление сферической aberrации и хроматизма в сингле и дублете введением осевого градиента показателя преломления // Изв. вузов. Приборостроение. 2013. Т. 56. № 10. С. 69—76.
9. Сушков А.Л. Некоторые малоизвестные aberrационные свойства оптической поверхности // Инженерный журнал: наука и инновации, 2013. Вып.7. [Электрон. ресурс] <http://engjournal.ru/catalog/pribor/optica/828.html>
10. Сушков А.Л. Коррекция кривизны поля изображения линзы с радиальной неоднородностью показателя преломления // Изв. вузов. Приборостроение. 2014. Т. 57. № 10. С. 60—65.

## Приложения

В приложениях приведены схемы расчетов в среде MathCAD монохроматических коэффициентов и хроматической аберрации положения линз с осевым и радиальным типами РПП. Применяемые обозначения приведены в начале каждого приложения.

### Приложение 1

#### **Расчет коэффициентов $S_I - S_V$ монохроматических аберраций 3-го порядка для линзы с ОРПП с использованием аналитического и универсального численного алгоритмов расчета параметров вспомогательных лучей**

##### *Применяемые обозначения*

- $n_{00}, n_{01}, n_{02}$  — коэффициенты полинома РПП  
 $r_1, r_2$  — радиусы кривизны поверхностей линзы, мм  
 $n_i$  — показатель преломления среды  $i, i = 1, 2, 3$   
 $d$  — толщина линзы, мм  
 $\rho_1, \rho_2$  — кривизна поверхностей линзы,  $\text{мм}^{-1}$   
 $s_p$  — удаление входного зрачка от первой поверхности линзы, мм  
 $m$  — высота луча на входном зрачке, мм  
 $z$  — текущая координата вдоль оптической оси, мм  
 $n_z$  — показатель преломления в вершине последней поверхности линзы  
 $n(z)$  — зависимость показателя преломления от координаты  $z$   
 $n_i(z)$  — зависимости коэффициентов функции РПП от координаты  $z$   
 $n(z, y)$  — функция РПП при изменении ПП по координатам  $z, y$   
 $\alpha_i, h_i$  — углы и высоты первого вспомогательного луча (поверхностная составляющая),  $h_i$  в мм

$\bar{\alpha}_2, \bar{h}_2$  — угол и высота первого вспомогательного луча на выходе из ГрОСр

$A_i, B_i$  — коэффициенты

$s'_{F'}$  — задний фокальный отрезок, мм

$f'$  — фокусное расстояние линзы, мм

$\beta_i, H_i$  — углы и высоты второго вспомогательного луча (поверхностная составляющая),  $H_i$  в мм

$\bar{\beta}_2, \bar{H}_2$  — угол и высота второго вспомогательного луча на выходе из ГрОСр

$P_i$  — основной абберационный параметр

$I_1, I_2$  — параксиальные инварианты на поверхностях

$B(z), H(z), A(z), \Lambda(z)$  — функции второго вспомогательного луча в ГрОСр (буквы греческого алфавита)

$K_i$  — градиентная составляющая поверхностного коэффициента абберации

$S_i$  — коэффициенты аббераций 3-го порядка,  $i = 1 \dots V$

$S_{i.H}, S_{i.G}$  — поверхностные однородный и неоднородный вклад в коэффициент  $S_i$

$S_{ij}$  — вклады переноса в коэффициент  $S_i$

$\Delta s'$  — продольная сферическая абберация с учетом коэффициентов РПП, мм

$\Delta s'_H$  — продольная сферическая абберация однородной линзы, мм

### *Характеристики среды с ОРПП и конструктивные параметры линзы*

$$n_{00} = 1,65 \qquad n_1 = 1 \qquad \rho_1 = 0,15575$$

$$n_{01} = -0,0605 \qquad n_2 = 1,65 \qquad \rho_2 = 0,0022$$

$$n_{02} = 0 \qquad n_3 = 1$$

$$\alpha_1 = 0 \qquad s_p = -0,1$$

$$h_1 = 10 \qquad d_1 = 1$$

*Вычисление параксиальных характеристик  $f$  и  $s'_{F'}$   
по аналитическим формулам*

$$\alpha_2 = \frac{h_1 \rho_1 (n_2 - n_1) + \alpha_1 n_1}{n_2} \qquad \alpha_2 = 0,6135606$$

$$n_z = n_2 + n_{01}d_1 \quad n_z = 1,5895$$

$$z = 1$$

$$n(z) = n_2 + n_{01}z \quad n(z) = 1,5895$$

$$\bar{\alpha}_2 = \frac{\alpha_2 n_2}{n_z} \quad \bar{\alpha}_2 = 0,6369141$$

$$h_2 = h_1 - \alpha_2 d_1 \quad h_2 = 9,3864394$$

$$\bar{h}_2 = h_1 - \frac{n_2 \alpha_2}{N_{01}} \ln \left( \frac{n_z}{n_2} \right) \quad \bar{h}_2 = 9,374908$$

$$\alpha_3 = \bar{h}_2 \rho_2 (n_3 - n_z) + \bar{\alpha}_2 n_z \quad \alpha_3 = 1,0002167$$

$$f = h_1 / \alpha_3 \quad f = 9,9978337$$

$$h_1 = f$$

$$s'_{F'} = \bar{h}_2 / \alpha_3 \quad s'_{F'} = 9,3728771$$

*Вычисление параксиальных характеристик  $f$  и  $s'_{F'}$   
при представлении  $\alpha_i$  и  $h_i$  рядами*

$$A_0 = 10$$

$$A_1 = -\alpha_2 \quad A_1 = -0,6135606$$

$$A_2 = \frac{-A_1 n_{01}}{2n_{00}} \quad A_2 = -0,0112486$$

$$A_3 = \frac{-2(A_2 n_{01} + A_1 n_{02})}{3n_{00}} \quad A_3 = -2,7496605 \cdot 10^{-4}$$

$$A_4 = \frac{-9A_3 n_{01}}{12n_{00}} \quad A_4 = -7,5615664 \cdot 10^{-6}$$

$$A_5 = \frac{-8A_4 n_{01}}{10n_{00}} \quad A_5 = -2,2180595 \cdot 10^{-7}$$

$$\bar{h}_2 = A_0 + A_1 d_1 + A_2 d_1^2 + A_3 d_1^3 + A_4 d_1^4 + A_5 d_1^5 \quad \bar{h}_2 = 9,374908$$

$$\bar{\alpha}_2 = -(A_1 + 2A_2 d_1 + 3A_3 d_1^2 + 4A_4 d_1^3 + 5A_5 d_1^4) \quad \bar{\alpha}_2 = 0,6369141$$

$$\alpha_3 = \bar{h}_2 \rho_2 (1 - n_z) + \bar{\alpha}_2 n_z \quad \alpha_3 = 1,0002166$$

$$f = h_1 / \alpha_3 \quad f = 9,9978343$$

$$s'_{F'} = \bar{h}_2 / \alpha_3 \quad s'_{F'} = 9,3728777$$

*Расчет второго вспомогательного луча по аналитическим формулам*

$$H_1 = s_p$$

$$\beta_1 = 1$$

$$\beta_2 = \frac{H_1 \rho_1 (n_2 - n_1) + \beta_1 n_1}{n_2} \quad \beta_2 = 0,599925$$

$$\bar{H}_2 = H_1 - \frac{n_2 \beta_2}{n_{01}} \ln \left( \frac{n_z}{n_2} \right) \quad \bar{H}_2 = -0,7112001$$

$$\bar{\beta}_2 = \frac{\beta_2 n_2}{n_z} \quad \bar{\beta}_2 = 0,6227595$$

$$\beta_3 = \bar{H}_2 \rho_2 (n_3 - n_z) + \bar{\beta}_2 n_z \quad \beta_3 = 0,9907986$$

*Расчет второго вспомогательного луча при  
представлении  $\beta_i$  и  $H_i$  рядами*

$$B_0 = s_p$$

$$B_1 = -\beta_2$$

$$B_2 = \frac{-B_1 n_{01}}{2n_{00}}$$

$$B_3 = \frac{-(2B_2 n_{01} + B_1 n_{02})}{3n_{00}}$$

$$B_4 = \frac{-3B_3 n_{01}}{4n_{00}}$$

$$B_5 = \frac{-n_{01}(3B_3 + 8B_4)}{10n_{00}}$$



$$\bar{H}_2 = B_0 + B_1 d_1 + B_2 d_1^2 + B_3 d_1^3 + B_4 d_1^4 + B_5 d_1^5 \quad \bar{H}_2 = -0,711203$$

$$\bar{\beta}_2 = -(B_1 + 2B_2 d_1 + 3B_3 d_1^2 + 4B_4 d_1^3 + 5B_5 d_1^4) \quad \bar{\beta}_2 = 0,6227743$$

*Параксиальный инвариант на первой поверхности  $I_1$*

$$I_1 = n_1 (H_1 \alpha_1 - h_1 \beta_1) \quad I_1 = -10,000000$$

*Параксиальный инвариант на второй поверхности  $I_2$*

$$I_2 = n_z (\bar{H}_2 \bar{\alpha}_2 - \bar{h}_2 \bar{\beta}_2) \quad I_2 = -10,000000$$

$$\beta_3 = \bar{H}_2 \rho_2 (n_3 - n_z) + \bar{\beta}_2 n_z \quad \beta_3 = 0,990822$$

*Расчет коэффициентов аберраций*

*Коэффициент  $S_1$*

$$\Delta \alpha_1 = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$\Delta \alpha_2 = \alpha_3 - \bar{\alpha}_2$$

$$\mu_1 = 1$$

$$\mu_2 = 1/n_2$$

$$\mu_3 = 1$$

$$\bar{\mu}_2 = 1/n_z$$

$$\Delta \mu_1 = \mu_2 - \mu_1$$

$$\Delta \mu_2 = \mu_3 - \bar{\mu}_2$$

$$P_1 = \frac{\Delta \alpha_1^2}{\Delta \mu_1^2} (\alpha_2 \mu_2 - \alpha_1 \mu_1)$$

$$P_2 = \frac{\Delta \alpha_2^2}{\Delta \mu_2^2} (\alpha_3 \mu_3 - \bar{\alpha}_2 \bar{\mu}_2)$$

*Поверхностный однородный вклад в коэффициент  $S_1$*

$$S_{1.H} = h_1 P_1 + \bar{h}_2 P_2 \quad S_{1.H} = 14,4138195$$

*Поверхностный неоднородный вклад в коэффициент  $S_I$*

$$S_{I.G} = n_{01}\rho_1^2 h_1^4 + n_{01}\rho_2^2 \bar{h}_2^4 \quad S_{I.G} = -14,6738659$$

*Вклад переноса*

$$S_{I.1} = n_z \bar{h}_2 \bar{\alpha}_2^3 - n_2 h_1 \alpha_2^3 \quad S_{I.1} = 0,0389304$$

$$\bar{\beta}_2(z) = -(B_1 + 2B_2 z + 3B_3 z^2 + 4B_4 z^3 + 5B_5 z^4)$$

$$\bar{\alpha}_2(z) = -(A_1 + 2A_2 z + 3A_3 z^2 + 4A_4 z^3 + 5A_5 z^4)$$

$$S_{I.2} = \int_0^{d_1} n(z) \bar{\alpha}_2(z)^4 dz \quad S_{I.2} = 0,2473573$$

*Суммарное значение коэффициента  $S_I$*

$$S_I = S_{I.H} + S_{I.G} + S_{I.1} + S_{I.2} \quad S_I = 0,0262412$$

*Расчет сферической аберрации 3-го порядка*

$$m = 2$$

*Градиентная линза*

$$\Delta s' = \frac{-m^2}{2f^2} S_I \quad \Delta s' = -5,2505225 \cdot 10^{-4}$$

*Однородная линза*

$$\Delta s'_{\text{одн}} = \frac{-m^2}{2f^2} S_{I.H} \quad \Delta s'_{\text{одн}} = -0,2884013$$

*Расчет коэффициента  $S_{II}$*

$$\Delta \beta_1 = \beta_2 - \beta_1$$

$$\Delta \beta_2 = \beta_3 - \bar{\beta}_2$$

*Поверхностные вклады*

*Однородный поверхностный вклад  $S_{II.H}$*

$$S_{II.H} = h_1 P_1 \frac{\Delta \beta_1}{\Delta \alpha_1} + \bar{h}_2 P_2 \frac{\Delta \beta_2}{\Delta \alpha_2} \quad S_{II.H} = -0,418189$$

*Неоднородный поверхностный вклад  $S_{II.G}$*

$$S_{II.G} = n_{01}\rho_1^2 h_1^3 H_1 + n_{01}\rho_2^2 \bar{h}_2^3 \bar{H}_2 \quad S_{II.G} = 0,1465897$$

*Вклады переноса*

$$S_{II.1} = n_z \bar{h}_2 \bar{\alpha}_2^2 \bar{\beta}_2 - n_2 h_1 \alpha_2^2 \beta_2 \quad S_{II.1} = 0,038066$$

$$S_{II.2} = \int_0^{d_1} n(z) \bar{\alpha}_2(z)^3 \bar{\beta}_2(z) dz \quad S_{II.2} = 0,2418613$$

*Суммарное значение коэффициента  $S_{II}$*

$$S_{II} = S_{II.H} + S_{II.G} + S_{II.1} + S_{II.2} \quad S_{II} = 8,327956 \cdot 10^{-3}$$

*Расчет коэффициента  $S_{III}$*

*Поверхностные вклады*

*Однородный поверхностный вклад  $S_{III.H}$*

$$S_{III.H} = h_1 P_1 \left( \frac{\Delta \beta_1}{\Delta \alpha_1} \right)^2 + \bar{h}_2 P_2 \left( \frac{\Delta \beta_2}{\Delta \alpha_2} \right)^2 \quad S_{III.H} = 9,3701731$$

*Неоднородный поверхностный вклад  $S_{III.G}$*

$$S_{III.G} = n_{01}\rho_1^2 h_1^2 H_1^2 + n_{01}\rho_2^2 \bar{h}_2^2 \bar{H}_2^2 \quad S_{III.G} = 1,4545954 \cdot 10^{-3}$$

*Вклады переноса*

$$S_{III.1} = n_z \bar{h}_2 \bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_2^2 - n_2 h_1 \alpha_2 \beta_2^2 \quad S_{III.1} = 0,03722$$

$$S_{III.2} = \int_0^{d_1} n(z) \bar{\alpha}_2(z)^2 \bar{\beta}_2(z)^2 dz \quad S_{III.2} = 0,2364871$$

*Суммарное значение коэффициента  $S_{III}$*

$$S_{III} = S_{III.H} + S_{III.G} + S_{III.1} + S_{III.2} \quad S_{III} = 9,6424259$$

*Расчет коэффициента  $S_{IV}$*

$$S_{IV} = -(\Delta \mu_1 \rho_1 + \Delta \mu_2 \rho_2) \quad S_{IV} = 0,0605401$$

*Расчет коэффициента  $S_v$*

*Поверхностные вклады*

*Однородный поверхностный вклад  $S_{v.H}$*

$$S_{v.H} = h_1 P_1 \left( \frac{\Delta \beta_1}{\Delta \alpha_1} \right)^3 + \bar{h}_2 P_2 \left( \frac{\Delta \beta_2}{\Delta \alpha_2} \right)^3 - J_1^2 \left( \Delta \mu_1 \rho_1 \frac{\Delta \beta_1}{\Delta \alpha_1} + \Delta \mu_2 \rho_2 \frac{\Delta \beta_2}{\Delta \alpha_2} \right)$$

$$S_{v.H} = 9,1602508$$

*Неоднородный поверхностный вклад  $S_{v.G}$*

$$S_{v.G} = n_{01} \rho_1^2 h_1 H_1^3 + n_{01} \rho_2^2 \bar{h}_2 \bar{H}_2^3 \quad S_{v.G} = 1,3688602 \cdot 10^{-5}$$

*Вклады переноса*

$$S_{v.1} = n_z \bar{h}_2 \bar{\beta}_2^3 - n_2 h_1 \beta_2^3 \quad S_{v.1} = 0,0363928$$

$$S_{v.2} = \int_0^{d_1} n(z) \bar{\alpha}_2(z) \bar{\beta}_2(z)^3 dz \quad S_{v.2} = 0,2312329$$

*Суммарное значение коэффициента  $S_v$*

$$S_v = S_{v.H} + S_{v.G} + S_{v.1} + S_{v.2} \quad S_v = 9,4278902$$

# Модель расчета хроматизма положения линзы с РПП рассеивающего типа

## Применяемые обозначения

Коэффициент хроматической аберрации положения	$S_{\text{Ixp}}$
Предмет на бесконечности. Исходное значение $\alpha_1$	$\alpha_1 = 0$
Угол на входе в градиентную среду	$\alpha_2$
Угол на выходе из градиентной среды	$\alpha_2$
Угол в пространстве изображений	$\alpha_3$
Дисперсия показателя преломления	$dn_{00} = n_{0\lambda 1} - n_{0\lambda 2}$
Дисперсия градиента показателя преломления	$dn_{00} = n_{0\lambda 1} - n_{0\lambda 2}$
РПП в градиентном стекле фирмы <i>Olimpus</i>	$n(y) = n_{00} + n_{10}y^2 + n_{20}y^4$
Число Аббе однородной среды	$v_{00} = 50,881$
Число Аббе градиентной среды	$v_{10} = 100$

$$n_1 = 1$$

$$r_1 = 3,3333$$

$$d = 1,75 \quad n_2 = 1,522$$

$$r_2 = -1,8967$$

$$n_3 = 1$$

$$n_{10} = 0,0983 \text{ мм}^{-2} \text{ (рассеивающая среда)}$$

$$n_{00} = n_2$$

$$\rho_1 = 1/r_1 \quad \rho_1 = 1/r_1 \quad t = \sqrt{2|n_{10}|/n_{00}} \quad (\text{мм}^{-1})$$

$$dn_{00} = \frac{n_2 - 1}{v_{00}} = 0,01026$$

$$dn_{10} = \frac{n_{10}}{v_{10}} = 9,83 \cdot 10^{-4} \text{ мм}^{-2}$$

$$\alpha_1 = 0 \quad h_1 = 10$$

$$\alpha_2 = \frac{h_1 \rho_1 (n_2 - n_1) + \alpha_1 n_1}{n_2} = 1,0289196$$

$$z_1 = t d_1 \quad \sinh(z_1) = 0,67126 \quad \cosh(z_1) = 1,2044$$

$$h_2 = h_1 (\cosh(z_1)) - \frac{\alpha_2}{t} \sinh(z_1) = 10,1223222$$

$$\alpha_{-2} = \alpha_2 \cosh(z_1) - t h_1 \sinh(z_1) = -1,1732948$$

$$\alpha_3 = h_2 \rho_2 (n_3 - n_2) + \alpha_{-2} n_2 = 1,0000586$$

$$f' = \frac{h_1}{\alpha_3} = 9,99941 \quad s'_f = \frac{h_2}{\alpha_3} = 10,12173$$

*Расчет поверхностного вклада  $S_{10xp}$*

$$S_{10xp} = \frac{-1}{v_{00}} [(\alpha_2 - \alpha_1) h_1 + (\alpha_3 - \alpha_{-2}) h_2] = -0,63459$$

$$h_{-2}(z) = h_1 \cosh(tz) - \frac{\alpha_2}{t} \sinh(tz) \quad h_{-2}(4) = 16,55351$$

$$\alpha_{-2}(z) = \alpha_2 \cosh(zt) - t h_1 \sinh(zt) \quad \alpha_{-2}(4) = -4,8515$$

*Расчет первой составляющей вклада переноса  $S_{11xp}$*

$$dn_{00} (h_2 \alpha_{-2} - h_1 \alpha_2) = -0,2274$$

*Расчет второй составляющей вклада переноса  $S_{12xp}$*

$$dn_{10} \int_0^{d_1} 2h_{-2}(z)^2 dz = 0,32661 \quad dn_{00} \int_0^{d_1} \alpha_{-2}(z)^2 dz = 7,24929 \cdot 10^{-3}$$

$$S_{1xp} = \frac{-1}{v_{00}} [(\alpha_2 - \alpha_1) h_1 + (\alpha_3 - \alpha_{-2}) h_2] + \\ + dn_{10} \int_0^{d_1} 2h_{-2}(z)^2 dz + dn_{00} \int_0^{d_1} \alpha_{-2}(z)^2 dz + dn_{00} (h_2 \alpha_{-2} - h_1 \alpha_2) = -0,52814$$

$$\Delta S'_{xp} = \frac{S_{1xp}}{\alpha_3^2 n_3} = -0,52807.$$

**Модель расчета коэффициентов  $S_1$ - $S_v$  линзы  
с РПП фокусирующего типа по универсальному алгоритму  
при положении предмета на конечном расстоянии  $s = -50$  мм**

*Применяемые обозначения*

$n_{00}, n_{01}...n_{04}, n_{10}...n_{13}, n_{20}...n_{22}$  — коэффициенты полинома РПП  
 $R_1, R_2$  — радиусы кривизны поверхностей линзы, мм  
 $d$  — толщина линзы, мм  
 $n_i$  — ПП среды  $n_{0i}$ ,  $i = 1, 2, 3$   
 $s_p$  — удаление входного зрачка, мм  
 $s$  — расстояние до предмета, мм  
 $\beta_0$  — линейное увеличение  
 $s_{prim}$  — задний отрезок, мм  
 $h, H$  — высоты первого и второго вспомогательных лучей на поверхностях линзы  
 $\alpha, \beta$  — углы с осью первого и второго вспомогательных лучей

*Характеристики неоднородной среды и конструктивные параметры*

$$\begin{array}{llllll}
 n_{00} = 1,522 & n_{10} = & n_{20} = 0 & & n_1 = 1 & \\
 & = -0,02775827 & & & & \\
 n_{01} = 0 & n_{11} = 0 & n_{21} = 0 & R_1 = & & \rho_1 = \frac{1}{R_1} = \\
 & & & = 2,17363 & & = 0,4600599 \\
 n_{02} = 0 & n_{12} = 0 & n_{22} = 0 & d_1 = 1,75 & n_2 = & \\
 & & & & = 1,522 & \\
 n_{03} = 0 & n_{13} = 0 & & R_2 = & & \rho_2 = \frac{1}{R_2} = \\
 & & & = 1,58243 & & = 0,6319395 \\
 n_{04} = 0 & & & & n_3 = 1 & \\
 s_p = -1,0 & s = -50 & & & & \\
 n_z = n_{00} + n_{01}d_1 + n_{02}d_1^2 + n_{03}d_1^3 + n_{04}d_1^4 & & & & & \\
 n_0(z) = n_{00} + n_{01}z + n_{02}z^2 + n_{03}z^3 + n_{04}z^4 & & & & & 
 \end{array}$$

$$n_1(z) = n_{10} + n_{11}z + n_{12}z^2 + n_{13}z^3$$

$$n_2(z) = n_{20} + n_{21}z + n_{22}z^2$$

$$n(z, y) = n_0(z) + n_1(z)y^2 + n_2(z)y^4$$

*Расчет первого вспомогательного луча*

$$\alpha_1 = -0,2715541 \quad h_1 = \alpha_1 s$$

$$\alpha_2 = \frac{h_1 \rho_1 (n_2 - n_1) + \alpha_1 n_1}{n_2} = 1,9639612$$

$$A_0 = h_1 = 13,577705 \quad A_1 = -\alpha_2 = -1,9639612$$

$$A_2 = \frac{2A_0 n_{10} - A_1 n_{01}}{2n_{00}} = -0,2476305$$

$$A_3 = \frac{2A_1 n_{10} + 2A_0 n_{11} - 2A_2 n_{01} - 2A_1 n_{02} - 2A_2 n_{01}}{6n_{00}} = 0,0119396$$

$$A_4 = \frac{2A_2 n_{10} + 2A_0 n_{12} - 6A_2 n_{02} - 3A_1 n_{03} + 2A_1 n_{11} - 9A_3 n_{01}}{12n_{00}} = 7,5271506 \cdot 10^{-4}$$

$$A_5 = \frac{A_3 n_{10} + A_0 n_{13} - 4A_2 n_{03} - 2A_1 n_{04} + A_1 n_{12} - 6A_3 n_{02} + A_2 n_{11} - 8A_4 n_{01}}{10n_{00}} =$$

$$= -2,177545 \cdot 10^{-5}$$

$$h_{-2} = A_0 + A_1 d_1 + A_2 d_1^2 + A_3 d_1^3 + A_4 d_1^4 + A_5 d_1^5 = 9,4530955$$

$$\alpha_{-2} = -(A_1 + 2A_2 d_1 + 3A_3 d_1^2 + 4A_4 d_1^3 + 5A_5 d_1^4) = 2,7058578$$

$$\alpha_{-3} = h_{-2} \rho_2 (1 - n_z) + \alpha_{-2} n_z = 1,0000001$$

$$\beta_0 = \alpha_1 / \alpha_3 = -0,2715541$$

$$s_{prim} = h_{-2} / \alpha_3 = 9,4530945$$

*Расчет второго вспомогательного луча*

$$H_1 = s_p \quad \beta_1 = 1 \quad \beta_2 = \frac{H_1 \rho_1 (n_2 - n_1) + \beta_1 n_1}{n_2}$$



$$B_0 = S_p \quad B_1 = -\beta_2 \quad B_2 = \frac{2B_0n_{10} - B_1n_{01}}{2n_{00}}$$

$$B_3 = \frac{2B_1n_{10} + 2B_0n_{11} - 2B_2n_{01} - 2B_1n_{02} - 2B_2n_{01}}{6n_{00}}$$

$$B_4 = \frac{2B_2n_{10} + 2B_0n_{12} - 6B_2n_{02} - 3B_1n_{03} + 2B_1n_{11} - 9B_3n_{01}}{12n_{00}}$$

$$B_5 = \frac{B_3n_{10} + B_0n_{13} - 4B_2n_{03} - 2B_1n_{04} + B_1n_{12} - 6B_3n_{02} + B_2n_{11} - 8B_4n_{01}}{10n_{00}}$$

$$H_{-2} = B_0 + B_1d_1 + B_2d_1^2 + B_3d_1^3 + B_4d_1^4 + B_5d_1^5 = -1,802167$$

$$\beta_{-2} = -(B_1 + 2B_2d_1 + 3B_3d_1^2 + 4B_4d_1^3 + 5B_5d_1^4) = 0,4089738$$

*Параксиальный инвариант на первой поверхности*

$$I_1 = n_1(H_1\alpha_1 - h_1\beta_1) = -13,3061509$$

*Параксиальный инвариант на второй поверхности*

$$I_2 = n_z(H_{-2}\alpha_{-2} - h_{-2}\beta_{-2}) = -13,3060486$$

$$\beta_3 = H_{-2}\rho_2(n_3 - n_z) + \beta_{-2}n_z$$

*Расчет коэффициентов аберраций*

*Коэффициент  $S_1$*

$$\Delta\alpha_1 = \alpha_2 - \alpha_1 \quad \Delta\alpha_2 = \alpha_3 - \alpha_{-2}$$

$$\mu_1 = 1 \quad \mu_2 = \frac{1}{n_2} \quad \mu_3 = 1 \quad \mu_{-2} = \frac{1}{n_z}$$

$$\Delta\mu_1 = \mu_2 - \mu_1 \quad \Delta\mu_2 = \mu_3 - \mu_{-2}$$

$$P_1 = \frac{\Delta\alpha_1^2}{\Delta\mu_1^2}(\alpha_2\mu_2 - \alpha_1\mu_1) \quad P_2 = \frac{(\Delta\alpha_2)^2}{(\Delta\mu_1)^2}(\alpha_3\mu_3 - \alpha_{-2}\mu_{-2})$$

$$B(z) = -(B_1 + 2B_2z + 3B_3z^2 + 4B_4z^3 + 5B_5z^4) \quad \text{функция } \beta(z)$$

$$H(z) = B_0 + B_1z + B_2z^2 + B_3z^3 + B_4z^4 + B_5z^5 \quad \text{функция } H(z)$$

$$A(z) = -(A_1 + 2A_2z + 3A_3z^2 + 4A_4z^3 + 5A_5z^4) \quad \text{функция } \alpha(z)$$

$$\Lambda(z) = A_0 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 + A_4z^4 + A_5z^5 \quad \text{функция } h(z)$$

$$K_1 = 4n_{10}\rho_1 \quad K_2 = -4n_{10}\rho_2$$

*Поверхностный однородный вклад*

$$S_{I.H} = h_1P_1 + h_{_2}P_2 = 719,1174195$$

*Поверхностный неоднородный вклад*

$$S_{I.G} = K_1h_1^4 + K_2h_{_2}^4 = -1,1757856 \cdot 10^3$$

$$S_{I.H} + S_{I.G} = -456,6681736$$

*Вклады переноса*

$$S_{I.1} = n_z h_{_2} \alpha_{_2}^3 - n_2 h_1 \alpha_2^3 = 128,4933467$$

$$S_{I.2} = \int_0^d n_0(z) A(z)^4 dz = 86,2682164$$

$$S_{I.3} = \int_0^d -4n_1(z) \Lambda(z)^2 A(z)^2 dz = 143,1924417$$

$$S_{I.4} = \int_0^d -8n_2(z) \Lambda(z)^4 dz = 0$$

$$S_{I.1} + S_{II.2} = 214,761563$$

*Суммарное значение коэффициента  $S_I$*

$$S_I = S_{I.H} + S_{I.G} + S_{I.1} + S_{I.2} + S_{I.3} + S_{I.4} = -98,7141689$$

*Расчет сферической аберрации*

$$u_1 = -0,02 \quad u_{prim} = u_1/\beta_0$$

$$\Delta s = -\frac{1}{2} u_{prim}^2 S_I = 0,2677299 \quad (\text{градиентная линза})$$

*Расчет коэффициента  $S_{II}$*

$$\Delta\beta_1 = \beta_2 - \beta_1 \quad \Delta\beta_2 = \beta_3 - \beta_{_2}$$

## Поверхностные вклады

### Поверхностный однородный вклад

$$S_{\Pi.H} = h_1 P_1 \frac{\Delta\beta_1}{\Delta\alpha_1} + h_{-2} P_2 \frac{\Delta\beta_2}{\Delta\alpha_2} = -115,6724242$$

### Поверхностный неоднородный вклад

$$S_{\Pi.G} = K_1 h_1^3 H_1 + K_2 h_{-2}^3 H_{-2} = 21,0451389$$

### Вклады переноса

$$S_{\Pi.1} = n_z h_{-2} \alpha_{-2}^2 \beta_{-2} - n_2 h_1 \alpha_2^2 \beta_2 = 3,2876686$$

$$S_{\Pi.2} = \int_0^d n_0(z) A(z)^3 B(z) dz = 16,1331792$$

$$S_{\Pi.3} = \int_0^d -2n_1(z) \Lambda(z) A(z) (\Lambda(z) B(z) + H(z) A(z)) dz = 5,2644549$$

$$S_{\Pi.4} = \int_0^d -8n_2(z) \Lambda(z)^3 H(z) dz = 0$$

### Суммарное значение коэффициента $S_{\Pi}$

$$S_{\Pi} = S_{\Pi.H} + S_{\Pi.G} + S_{\Pi.1} + S_{\Pi.2} + S_{\Pi.3} + S_{\Pi.4} = -69,9419825$$

## Расчет коэффициента $S_{\Pi\Pi}$

### Поверхностный однородный вклад

$$S_{\Pi\Pi.H} = h_1 P_1 \left( \frac{\Delta\beta_1}{\Delta\alpha_1} \right)^2 + h_{-2} P_2 \left( \frac{\Delta\beta_2}{\Delta\alpha_2} \right)^2 = 4,4024004$$

### Поверхностный неоднородный вклад

$$S_{\Pi\Pi.G} = K_1 h_1^2 H_1^2 + K_2 h_{-2}^2 H_{-2}^2 = 10,9469886$$

### Вклад переноса

$$S_{\Pi\Pi.1} = n_z h_{-2} \alpha_{-2} \beta_{-2}^2 - n_2 h_1 \alpha_2 \beta_2^2 = -3,6042152$$

$$S_{\Pi\Pi.2} = \int_0^d n_0(z) A(z)^2 B(z)^2 dz = 3,0808798$$

$$S_{\Pi\Pi.3} = \int_0^d -4n_1(z) \Lambda(z) A(z) B(z) H(z) dz = -3,383631$$

$$S_{III.4} = \int_0^d -8n_2(z)\Lambda(z)^2 H(z)^2 dz = 0$$

*Суммарное значение коэффициента  $S_{III}$*

$$S_{III} = S_{III.H} + S_{III.G} + S_{III.1} + S_{III.2} + S_{III.3} + S_{III.4} = 11,4424224$$

*Расчет коэффициента  $S_{IV}$*

*Поверхностный однородный вклад*

$$S_{IV.H} = -(\Delta\mu_1\rho_1 + \Delta\mu_2\rho_2) = -0,0589495$$

*Вклад неоднородности среды*

$$S_{IV.G} = -2n_{10}d_1/n_{00}^2 = 0,0419403$$

*Суммарное значение коэффициента  $S_{IV}$*

$$S_{IV} = S_{IV.H} + S_{IV.G} = -0,0170092$$

*Расчет коэффициента  $S_V$*

*Вклад однородной поверхности*

$$S_{V.H} = h_1 P_1 \left( \frac{\Delta\beta_1}{\Delta\alpha_1} \right)^3 + h_{-2} P_2 \left( \frac{\Delta\beta_2}{\Delta\alpha_2} \right)^3 + I_1^2 \left[ -\Delta\mu_1\rho_1 \frac{\Delta\beta_1}{\Delta\alpha_1} + (-\Delta\mu_2\rho_2) \frac{\Delta\beta_2}{\Delta\alpha_2} \right] =$$

$$= 21,1188809$$

*Вклад неоднородной поверхности*

$$S_{V.G} = K_1 h_1 H_1^3 + K_2 h_{-2} H_{-2}^3 = -3,1887072$$

*Вклады переноса*

$$S_{V.1} = n_z h_{-2} \beta_{-2}^3 - n_2 h_1 \beta_2^3 = -1,587271$$

$$S_{V.2} = \int_0^d n_0(z) A(z) B(z)^3 dz = 0,6011632$$

$$S_{V.3} = \int_0^d -2n_1(z) \Lambda(z) B(z) (\Lambda(z) B(z) + H(z) A(z)) dz = 1,1684647$$

$$S_{V.4} = \int_0^d -8n_2(z) \Lambda(z) H(z)^3 dz = 0$$

*Суммарное значение коэффициента  $S_V$*

$$S_V = S_{V.H} + S_{V.G} + S_{V.1} + S_{V.2} + S_{V.3} + S_{V.4} = 18,1125306$$

*Итоговые значения коэффициентов aberrаций 3-го порядка*

$$S_I = -98,7141689 \quad S_{II} = -69,9419825 \quad S_{III} = 11,4424224$$

$$S_{IV} = -0,0170092 \quad S_V = 18,1125306$$

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	3
Введение .....	4
Список основных сокращений .....	5
<b>1. МЕТОДЫ РАСЧЕТА РЕАЛЬНЫХ ЛУЧЕЙ В ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ ГРАДИЕНТНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ .....</b>	<b>6</b>
1.1. Лучевое уравнение и обзор методов его решения .....	6
1.2. Способы описания поверхности оптических элементов и неоднородного показателя преломления .....	13
1.3. Расчет траектории реального луча .....	17
Вопросы для самопроверки .....	21
<b>2. ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ И ОПТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРАДИЕНТНЫХ СРЕД И ЭЛЕМЕНТОВ .....</b>	<b>22</b>
2.1. Обзор технологий градиентных сред .....	22
2.2. Оптические свойства сред с осевым распределением показателя преломления .....	28
2.3. Обзор характеристик известных градиентных оптических элементов .....	36
Вопросы для самопроверки .....	47
<b>3. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ГРАДИЕНТНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ПАРАКСИАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ. ГАУССОВЫ КОЭФФИЦИЕНТЫ .....</b>	<b>48</b>
3.1. Расчет параксиальных лучей в градиентных средах .....	48
3.2. Гауссовы коэффициенты градиентной оптической системы .....	55
3.3. Теория хроматизма градиентных оптических систем. Коэффициенты хроматических аберраций .....	61
Вопросы для самопроверки .....	68

4. ТЕОРИЯ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ АБЕРРАЦИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ГРАДИЕНТНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ .....	69
4.1. Аберрационный полином и коэффициенты аберраций третьего порядка .....	70
4.2. Коэффициенты аберраций третьего порядка в параметрах Ланге для градиентных оптических систем .....	72
4.3. Обзор свойств асферической поверхности второго порядка и ее аберрационные аналогии с градиентными оптическими элементами, имеющими РПП или ОРПП .....	75
Вопросы для самопроверки .....	80
5. ГАУССОВА ОПТИКА ГРАДАНОВ. ТЕОРИЯ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ АБЕРРАЦИЙ ГРАДАНОВ .....	81
5.1. Масштабные, апертурные и полевые характеристики градана .....	82
5.2. Хроматическая аберрация положения градана .....	84
5.3. Коэффициенты монохроматических аберраций третьего порядка граданов .....	86
5.4. Аберрации третьего порядка короткого градана-объектива .....	88
5.5. Аберрации третьего порядка градана-объектива увеличенной длины и градана-транслятора изображения.....	98
5.6. Коэффициенты РПП реальных граданов .....	106
Вопросы для самопроверки .....	108
6. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГРАДИЕНТНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ОБЛАСТИ АБЕРРАЦИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА .....	109
6.1. Проектирование синглета и дублета с ОРПП .....	109
6.2. Проектирование линз с заданной кривизной поля изображения.....	116
6.3. Проектирование объектива «Триплет» с градиентными линзами .....	119
Вопросы для самопроверки .....	121
Заключение .....	122
Литература .....	124
Приложения .....	125

*Учебное издание*

**Сушков Александр Леонидович  
Поспехов Вячеслав Георгиевич  
Ровенская Тамара Сергеевна**

**Теоретические основы  
проектирования оптических систем  
с неоднородным показателем преломления**

*Редактор В.Г. Чуреева  
Корректор О.Ю. Соколова  
Художник Я.М. Ильина  
Компьютерная графика О.В. Левашовой  
Компьютерная верстка Т.В. Батраковой*

Оригинал-макет подготовлен  
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана.

В оформлении использованы шрифты  
Студии Артемия Лебедева.

Подписано в печать 23.11.2016 . Формат 60×90/16.  
Усл. печ. л. 9,0. Тираж 100 экз. Изд. № 101-2015. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.  
[press@bmstu.ru](mailto:press@bmstu.ru)  
[www.baumanpress.ru](http://www.baumanpress.ru)

Отпечатано в типографии МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.  
[baumanprint@gmail.com](mailto:baumanprint@gmail.com)