В. А. Зорич

Язык естествознания

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ АЗБУКА

МОСКВА
ИЗДАТЕЛЬСТВО МЦНМО
2011

УДК 51.0
ББК 22.1
З86

Зорич В. А.

З86 Язык естествознания. Математическая азбука. — М.: МЦНМО, 2011. — 40 с.

ISBN 978-5-94057-686-0

В этой маленькой книжке автор одного из наиболее известных современных универститетских учебников математического анализа объясняет основы и открывает возможности этой науки широкому кругу читателей разных возрастов и профессиональных интересов.

ББК 22.1

Владимир Антонович Зорич

ЯЗЫК ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ АЗБУКА

Подписано в печать 24.09.2010 г. Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Печ. л. 2,5. Тираж 2000 экз. Заказ № ????

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., 6.

ISBN 978-5-94057-686-0

Два вводных слова

Людей, которые желают пользоваться или которым приходится пользоваться автомобилем, телефоном, таблицей умножения или даже письменностью, много больше тех, кто все это создает.

Если уж случилось, что вы написали подробный учебник студентам-математикам, вы с чистой совестью[1] можете себе позволить теперь уже без сурового, дотошного, порой изнуряющего, неуместного здесь педантизма показать кое-что базовое и эффективное также и непрофессионалам хотя бы с высоты и в темпе птичьего полета.

Математика, функция, закон и как себя вести

К чудесам люди привыкают быстро и «Не может быть???» вскоре незаметно превращается в «Не может быть иначе!!!».

Мы уже настолько свыклись с тем, что $2+3=5$, что не видим тут никакого чуда. А ведь тут не сказано, что два яблока и еще три яблока будет пять яблок, а сказано, что это так и для яблок, и для слонов, и для всего прочего.

Потом мы свыкаемся с тем, что $a+b=b+a$, где теперь уже символы a и b могут означать и 2, и 3, и любые целые числа.

Функция, или функциональная зависимость, — это очередное математическое чудо. Оно сравнительно молодо: ему как научному понятию всего три с небольшим сотни лет, хотя в природе и даже в быту мы с ним сталкиваемся никак не реже, чем со слонами или даже с теми же яблоками.

Каждая наука или область человеческой деятельности относится к какой-то конкретной сфере объектов и их взаимосвязей. Эти

---

1 С чистой совестью перед студентами-математиками, которым все доказывалось, и перед нематематиками, которым надо уметь рулить и, не открывая капот, быть уверенными, что под капотом есть что-то и оно надежно.

связи, зависимости, законы математика описывает и изучает в отвлеченном и потому общеполезном виде, объединяя их термином *функция,* или *функциональная зависимость* $y = f(x)$ *состояния* (значения) *одной величины* (y) *от состояния* (значения) *другой* (x).

Особенно важно то, что теперь уже речь не о постоянных, а о переменных величинах x и y, связанных законом f. Функция приспособлена к описанию развивающихся процессов и явлений, к описанию характера изменения их состояний и вообще к описанию зависимостей переменных величин.

Иногда закон f связи известен (дан) (например, государством или технологическим процессом), и тогда в условиях действия закона f мы, например, часто стараемся так выбрать стратегию, т. е. состояние (значение) доступной нашему выбору независимой переменной x, чтобы получить наиболее благоприятное для нас в том или ином отношении состояние (значение) нужной нам величины y (учитывая, что $y = f(x)$).

В других случаях (и это даже интереснее) ищется сам закон природы f, связывающий явления. И хотя это дело конкретных наук, математика и здесь бывает удивительно полезна потому, что часто по, казалось бы, очень малой исходной конкретной информации, которой располагают те или иные профессионалы, она, подобно Шерлоку Холмсу, способна сама дальше найти закон f (решая или исследуя некоторые новые, так называемые *дифференциальные*, уравнения, которых не было у древних математиков и которые возникли с появлением дифференциального и интегрального исчисления на рубеже XVII—XVIII веков усилиями Ньютона, Лейбница, их предшественников и последователей).

Итак, открываем букварь современной математики. Как и положено, научимся сначала читать и писать.

График функции

Учимся читать и формулировать желания, когда у нас есть выбор.

Наглядным заданием зависимости $y = f(x)$ является ее график (см. рис. 1). По графику, конечно, можно при каждом конкретном значении независимой переменной x из области определения функции f найти ее значение $y = f(x)$. Собственно говоря, график функции f

и есть совокупность точек координатной плоскости с координатами $(x, y) = (x, f(x))$. Но для вычислительных целей обычно используют компьютер, а не график.

График же лучше использовать для получения представления о характере зависимости $y = f(x)$ в целом, о специфике поведения функции на различных участках изменения переменной x. Вид графика, как взгляд на панораму, позволяет сориентироваться и сразу направиться к тем местам, которые нам представляются благоприятными, желанными, и, наоборот, избегать каких-то других областей значений параметра x.

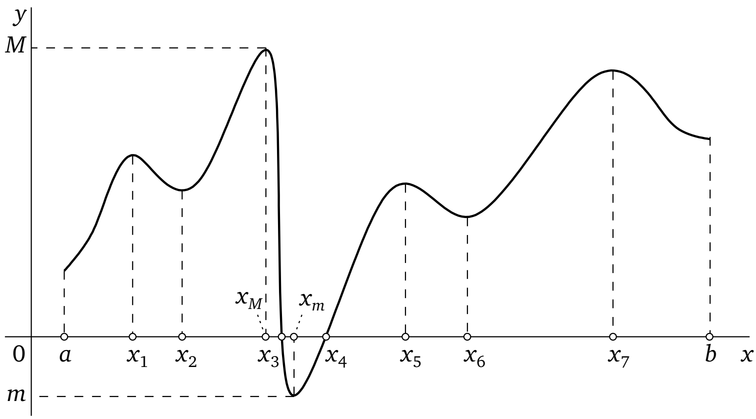

Рис. 1

Что мы видим сразу? На участках $[a, x_1]$, $[x_2, x_M]$, $[x_m, x_5]$, $[x_6, x_7]$ рост x сопровождается ростом y, т. е. *функция монотонно возрастает*, а на участках $[x_1, x_2]$, $[x_M, x_m]$, $[x_5, x_6]$, $[x_7, b]$ увеличение значения переменной x приводит к уменьшению значения y, т. е. *функция убывает*.

В точке x_M функция принимает *максимальное значение* и оно положительно. В точке x_m она достигает своего *абсолютного минимума* m, причем $m < 0$.

Помимо указанных абсолютного максимума и абсолютного минимума у функции есть локальные экстремумы: *локальные максимумы* при $x = x_1, x_5, x_7$ и *локальные минимумы* в точках a, x_2, x_6, b.

(Локальность здесь означает рассмотрение только в пределах некоторой окрестности точки.)

В точках x_3 и x_4 функция обращается в нуль: $f(x_3)=f(x_4)=0$.

Теперь обратим внимание на некоторые дальнейшие детали. Участки роста и убывания заметно отличаются скоростью изменения значений функции. Как этим словам придать какую-то количественную и явно полезную характеристику, подумаем позже, а сейчас только скажем, что график где-то идет полого, а где-то поднимается или опускается круто.

На что это может влиять? Ну, например, нельзя полному людей автобусу резко тормозить или слишком быстро набирать скорость. Ракету с космонавтом тоже нельзя запускать без учета допустимых перегрузок. Или пусть, например, на нашем графике y — это доход от вклада, сделанного в момент x. Конечно, мы постараемся подгадать так, чтобы сделать вклад в момент x_M. Но это довольно рискованно, поскольку очень малая ошибка по времени может, как видно из графика, привести к катострофическим потерям. Тут функция очень *быстро меняется*, и можно угодить в окрестность точки x_m, которая близка к x_M. В этом отношении куда более *устойчива и надежна* ситуация в окрестности точки x_7. Мы не получим здесь максимально возможного выигрыша M, но выигрыш заведомо будет, будет устойчив и по порядку величины даже сопоставим с M.

На этом первый урок чтения закончим, отметив про себя, что полезно уметь находить *экстремумы функции*, участки ее монотонности (*возрастания, убывания*), а также надо бы научиться как-то адекватно характеризовать *скорость изменения функции*.

Математическая модель явления

Дифференциальное уравнение, или учимся писать.

Одним из наиболее ярких и долго сохраняющихся впечатлений от школьной математики, конечно, является маленькое чудо, когда что-то вам неизвестное вы заколдовываете буквой x или буквами x, y, потом пишете что-то вроде $a \cdot x = b$ или какую-нибудь систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = 1, \\ x - y = 2, \end{cases}$$

после чего парой математических заклинаний открываете то, что было неизвестно: $x=1$, $y=-1$.

Конечно, немало времени ушло еще на решение одного только квадратного уравнения и всего, что с этим связано. Но о решении уравнений разговор особый.

Давайте попробуем научиться хотя бы писать уравнения в новой ситуации, когда нам надо найти не какое-то одно число, а неизвестный нам закон связи важных для нас переменных величин, т. е. когда мы ищем нужную функцию.

Рассмотрим реальные примеры.

Для определенности мы сначала будем говорить о биологии (размножении микроорганизмов, росте биомассы, взаимовлиянии популяций, хищниках и жертвах, экологических ограничениях и т. п.), но будет ясно, что при желании все это можно перенести в другие сферы и говорить о росте капитала, о ядерной реакции или об атмосферном давлении.

1. Известно, что в благоприятных условиях скорость размножения микроорганизмов, т. е. скорость роста биомассы, пропорциональна (с некоторым коэффициентом пропорциональности k) наличному количеству биомассы. Надо найти закон $x=x(t)$ изменения биомассы во времени, если известно ее начальное состояние $x(0)=x_0$.

По нашим представлениям, знай мы сам закон $x=x(t)$ изменения величины x, мы бы знали и скорость ее изменения в любой момент времени t. Не вдаваясь пока в обсуждение того, как именно по $x(t)$ находить эту скорость, обозначим ее через $x'(t)$. Поскольку функция $x'=x'(t)$ порождается функцией $x=x(t)$, ее в математике называют *производной* от функции $x=x(t)$. (Как находить производную функции и многому другому учит дифференциальное исчисление. Оно еще впереди.)

Теперь можно коротко записать, что нам дано:

$$x'(t)=k\cdot x(t), \tag{1}$$

причем $x(0)=x_0$. Хотим же мы найти саму зависимость $x=x(t)$.

Мы написали первое *дифференциальное уравнение* (1). Вообще, дифференциальными называют уравнения, содержащие производные (некоторые оговорки и уточнения здесь пока неуместны).

Кстати, для упрощения текста в записи уравнения независимую переменную часто опускают. Например, уравнение (1) пишут в виде $x' = k \cdot x$. Если бы искомая функция была обозначена буквой f или u, то то же уравнение имело бы вид $f' = k \cdot f$ или $u' = k \cdot u$ соответственно.

Уже сейчас ясно, что если мы научимся не только писать, но и решать или исследовать дифференциальные уравнения, то мы сможем многое узнать и предвидеть. Именно поэтому сакраментальная фраза Ньютона, относившаяся к новому исчислению, звучала примерно так: «Полезно решать дифференциальные уравнения».

Попробуем по горячим следам записать уравнением еще несколько конкретных вопросов.

2. Допустим теперь, как это всегда и случается, что еды не бесконечно много и среда может прокормить не более чем K особей или биомассу, не превышающую значения K. Тогда, надо полагать, скорость роста биомассы будет уменьшаться, например, пропорционально остающимся возможностям среды. За меру остающихся возможностей можно взять разность $K - x(t)$ или лучше взять безразмерную величину $1 - \frac{x(t)}{K}$. Этой ситуации вместо уравнения (1), очевидно, отвечает уравнение

$$x' = k \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right), \tag{2}$$

которое переходит в (1) на стадии, когда $x(t)$ еще много меньше K. Наоборот, когда $x(t)$ близко к K, скорость роста становится близкой к нулю, т. е. рост прекращается, что естественно. Как именно выглядит закон $x = x(t)$ в этом случае, мы найдем позже, овладев кое-какими навыками.

3. Рассмотрим теперь другую классическую ситуацию. Предположим, что на какой-то территории живут зайцы и волки. Первые питаются травой и имеют ее вдоволь. В отсутствие волков скорость прироста зайцев с учетом естественной смертности пропорциональна их количеству, которое мы обозначим через x (или $x(t)$). Если есть волки в количестве y (или $y(t)$), то убыль зайцев пропорциональна вероятности встречи зайца с волком, т. е. пропорциональна произведению xy. Скорость роста численности волков пропорциональна количеству съеденной пищи, т. е. пропорциональна xy,

а смертность пропорциональна их численности. В математической записи сказанное, очевидно, равносильно следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = ax - bxy, \\ y' = cxy - dy. \end{cases}$$

Если при этом из наблюдений или еще из каких-то соображений кроме коэффициентов a, b, c, d нам известны также начальные состояния $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, то эти данные уже вполне однозначно определят интересующие нас зависимости $x = x(t)$ и $y = y(t)$.

Упражнение. В отличие от микроорганизмов, разнополые популяции размножаются со скоростью, пропорциональной количеству встреч между особями. Как изменится уравнение (1) в этом случае, если никакие другие факторы не принимать во внимание? (Все это можно отнести, например, и к некоторым химическим реакциям.)

Рассмотрим теперь несколько физических примеров.

4. Фундаментальный закон Ньютона $ma = F$ устанавливает связь между силой F, действующей на тело массы m, и величиной вызванного ею ускорения a тела. Для простоты мы рассматриваем сейчас движения вдоль прямой, когда векторы a и F фактически задаются как числа.

Пусть $x(t)$ — положение тела (его координата) в момент времени t. Тогда $x'(t)$ — его скорость в этот же момент. Но ускорение есть скорость изменения скорости. Значит $a = a(t)$ есть производная от функции $x'(t)$, т. е. $(x')'(t)$. Ее записывают как $x''(t)$ и, естественно, называют *второй производной* исходной функции $x = x(t)$.

В этих обозначениях закон Ньютона имеет вид

$$mx'' = F. \tag{3}$$

Если воздействие $F = F(t)$ как функция времени известно, то мы здесь имеем дифференциальное уравнение (второго порядка, поскольку оно уже содержит вторую производную x'') относительно неизвестной функции $x = x(t)$. Если задать начальные условия в виде начального положения $x(0) = x_0$ тела и его начальной скорости $x'(0) = v_0$, то закон движения $x = x(t)$ определится полностью.

Рассмотрим несколько специальных ситуаций.

5. Пусть тело на пружинке, один конец которой закреплен в начале координат, а другой на подвижном теле. На тело, отклоненное от начала координат в точку x, будет действовать возвращающая сила, которую при малых отклонениях можно в первом приближении считать пропорциональной величине отклонения, $F=-kx$. Коэффициент k здесь называется коэффициентом жесткости пружины. В рассматриваемом случае уравнение движения (3) конкретизируется и приобретает вид

$$mx'' = -kx. \tag{4}$$

6. Пусть теперь тело падает на Землю под действием силы тяжести. Если все происходит у поверхности Земли, то гравитационную силу можно считать практически постоянной и пропорциональной массе тела: $F=mg$. Тогда постоянно и ускорение такого свободного падения, т. е. $x''=g$ (на вертикальной оси мы здесь выбрали направление к центру Земли). Если в начальный момент тело было в точке x_0 и имело скорость v_0, то решением уравнения $x''=g$ при таких начальных условиях, как мы скоро проверим, и как вам по совету Галилея, наверное, сказали в школе, будет функция $x=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+x_0$.

7. И в заключение попробуем принять во внимание, что у Земли есть атмосфера, которая оказывает сопротивление движущемуся в ней телу. Для не слишком больших скоростей (например, при свободном падении) можно считать, что эта сила сопротивления пропорциональна скорости движения. Сам же коэффициент пропорциональности зависит от индивидуального тела (для человека и парашюта он, слава Богу, разный). Значит, если в предыдущем примере мы захотим учесть влияние атмосферы, то мы получим уравнение $mx''=mg-kx'$. Присутствие нового члена $-kx'$ в правой части уравнения, т. е. наличие сопротивления воздуха, приводит к тому, что скорость свободного падения нарастает не бесконечно, а выходит на некоторый предельный уровень, зависящий от массы и формы тела. Для парашютиста средней комплекции в затяжном прыжке это порядка 200 км/час, т. е. порядка 60 м/с.

Первый урок письма закончен. Мы еще не умеем решать дифференциальные уравнения, но получили представление о том, как их можно или нужно создавать и писать. Эти уравнения являются математической моделью рассматриваемого конкретного явления.

Мера, в которой они отражают явление, всецело зависит от того, насколько правильно понимает явление тот, кто составляет уравнение. Отбросил ли он второстепенные детали или уже выплеснул с водой и ребенка. В последнем случае дальнейшие труды напрасны. Более того, в одних масштабах, как мы видели, можно пренебрегать тем, чем в других масштабах пренебрегать абсолютно недопустимо. Но это уже вопрос квалификации специалиста.

Итак, худо-бедно вы уже можете написать нужное вам уравнение. Если вы пока не в состоянии его решить, то по крайней мере теперь уже сможете обратиться с конкретным вопросом за советом к математикам.

После «урока чтения» и «урока письма» наши ближайшие математические цели прояснились:

а) Надо научиться *дифференцировать,* т. е. по данной функции F находить ее *производную* $F' = f$.

в) Надо научиться решать хотя бы простейшее уравнение $F' = f$, когда по известной производной f ищется исходная функция F. Эта функция F называется *первообразной* функции f. Операция отыскания первообразной, как видно, обратна операции дифференцирования. Она называется *интегрированием*[2].

Дифференцирование и интегрирование

Итак, будем решать поставленные выше задачи а и в.

а. *Скорость и производная.* Рассмотрим сначала знакомую конкретную ситуацию, где мы можем обратиться к нашей интуиции.

Пусть точка движется вдоль числовой оси, $s(t)$ — ее координата в момент t, а $v(t) = s'(t)$ — ее скорость в тот же момент t. За промежуток времени h, прошедший после момента t, точка сместится в положение $s(t+h)$. По нашим представлениям о скорости, величина $s(t+h) - s(t)$ перемещения точки за малый промежуток времени h, прошедший после момента t, и ее скорость $v(t)$ в момент t связаны

2 *Неопределенным интегрированием*, если быть более точным. Почему — разъясним чуть позже.

соотношением
$$s(t+h)-s(t)\approx v(t)\cdot h \tag{5}$$
или иначе, $v(t)\approx\dfrac{s(t+h)-s(t)}{h}$, и это приближенное равенство тем точнее, чем меньше промежуток времени h, прошедший после момента t.

Значит, надо полагать
$$v(t):=\lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h},$$
т. е. мы определяем $v(t)$ как предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента, когда последнее стремится к нулю.

Теперь нам ничего не стоит, копируя этот пример, дать общее определение значения $f'(x)$ *производной f' функции f в точке x*:
$$f'(x):=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \tag{6}$$
т. е. $f'(x)$ есть предел отношения *приращения* $\Delta f=f(x+h)-f(x)$ *функции* к *приращению* $\Delta x=(x+h)-x$ *ее аргумента*, когда последнее стремится к нулю.

Соотношение (6) можно переписать в подобной (5) другой и, быть может, самой удобной и полезной форме:
$$f(x+h)-f(x)=f'(x)h+o(h), \tag{7}$$
где $o(h)$ — некоторая *величина* (поправка), *малая по сравнению с h при стремлении h к нулю*. (Последнее означает, что отношение $o(h)/h$ стремится к нулю при стремлении h к нулю.)

Проделаем несколько пробных расчетов.

1. Пусть f — постоянная, т. е. $f(x)\equiv c$. Тогда, очевидно, $\Delta f=$ $=f(x+h)-f(x)\equiv 0$ и $f'(x)\equiv 0$, что естественно: скорость изменения равна нулю, если изменений нет.

2. Если $f(x)=x$, то $f(x+h)-f(x)=h$, поэтому $f'(x)\equiv 1$. А если $f(x)=kx$, то $f(x+h)-f(x)=kh$ и $f'(x)\equiv k$.

3. Кстати, тут можно сделать два очевидных, но весьма полезных общих наблюдения: если функция f имеет своей производной f', то функция cf, где c — числовой множитель, имеет своей производной cf', т. е. $(cf)'=cf'$; в этом же смысле $(f+g)'=f'+g'$, т. е. производная суммы функций равна сумме их производных, если последние определены.

4. Пусть $f(x)=x^2$. Тогда $f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-x^2=2xh+h^2=$ $=2xh+o(h)$, поэтому $f'(x)=2x$.

5. Аналогично, если $f(x)=x^3$, то $f(x+h)-f(x)=(x+h)^3-x^3=$ $=3x^2h+3xh^2+h^3=3x^2h+o(h)$, поэтому $f'(x)=3x^2$.

6. Теперь понятно, что вообще, если $f(x)=x^n$, имеем $f'(x)=$ $=nx^{n-1}$, поскольку $f(x+h)-f(x)=(x+h)^n-x^n=nx^{n-1}h+o(h)$,

7. Значит, если имеем многочлен $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+$ $+a_{n-1}x+a_n$, то $P'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}$.

Пробное прощупывание определения производной сделали. Разрабатывать и осваивать технику и практику дифференцирования надо будет отдельно, и к этому мы, конечно, еще вернемся. А сейчас пора хотя бы так же в идейном плане подойти ко второй намеченной цели.

в. *Интеграл и первообразная.* Теперь мы хотим по производной находить ее первообразную.

Давайте опять начнем с чего-то, где работает наша интуиция. Опять рассмотрим ту же движущуюся точку. Но теперь предположим, что мы знаем положение $s(t_0)$ точки в некоторый момент t_0 и к нам поступают данные о ее скорости $v(t)$. Располагая ими, мы хотим вычислить $s(t)$ для любого фиксированного значения $t>t_0$.

Если считать скорость $v(t)$ меняющейся непрерывно, то смещение точки за малый промежуток времени приближенно можно вычислить как произведение $v(\tau)\Delta t$ скорости в произвольный момент τ, относящийся к этому промежутку времени, на величину Δt самого промежутка. Учитывая это замечание, разобьем отрезок $[t_0, t]$, отметив некоторые моменты t_i $(i=0, \ldots, n)$ так, что $t_0<t_1<\ldots<$ $<t_n=t$, и так, что промежутки $[t_{i-1}, t_i]$ малы. Пусть $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$ и $\tau_i\in[t_{i-1}, t_i]$, тогда, суммируя элементарные перемещения $s(t_i)-$ $-s(t_{i-1})\approx v(\tau_i)\Delta t_i$, имеем приближенное равенство

$$s(t)-s(t_0)\approx\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i.$$

По нашим представлениям, это приближенное равенство будет уточняться, если переходить к разбиениям отрезка $[t_0, t]$ на все более мелкие промежутки. Таким образом, надо полагать, что в пределе, когда величина λ наибольшего из промежутков разбиения стремится к нулю, получим точное равенство

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i = s(t) - s(t_0). \tag{8}$$

Это равенство, с точностью до обозначений, которые вскоре появятся, есть не что иное, как фундаментальная для всего анализа формула Ньютона—Лейбница. Она позволяет, с одной стороны, численно находить первообразную $s(t)$ по ее производной $v(t)$, а с другой стороны — по найденной каким-либо способом первообразной $s(t)$ функции $v(t)$ найти стоящий слева предел сумм $\sum\limits_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$.

Такие суммы, называемые *интегральными суммами*, встречаются в самых разнообразных случаях.

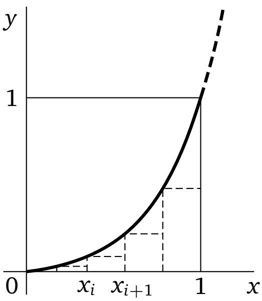

Рис. 2

Попробуем, например, следуя Архимеду, найти площадь под параболой $y = x^2$ над отрезком $[0, 1]$ (рис. 2). Не останавливаясь здесь на подробном обсуждении понятия площади фигуры, мы, как и Архимед, будем действовать методом исчерпания фигуры посредством простейших фигур — прямоугольников, площади которых мы вычислять умеем. Разбив отрезок $[0, 1]$ точками $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ на мелкие отрезки $[x_{i-1}, x_i]$, мы, очевидно, можем приближенно вычислить искомую площадь σ как сумму площадей изображенных на рисунке прямоугольников:

$$\sigma \approx \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2 \Delta x_i;$$

здесь $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Полагая $f(x) = x^2$ и $\xi_i = x_{i-1}$, мы перепишем полученную формулу в виде

$$\sigma \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

В этих обозначениях в пределе будем иметь

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sigma, \tag{9}$$

где, как и выше, λ — длина наибольшего из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения.

Формула (9) только обозначениями отличается от формулы (8). Забыв на миг о геометрическом смысле $f(\xi_i)$, Δx_i и считая x временем, а $f(x)$ скоростью, найдем первообразную $F(x)$ функции $f(x)$ и тогда по формуле (8) получим, что $\sigma = F(1) - F(0)$.

В нашем случае $f(x) = x^2$, поэтому $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$ и $\sigma = F(1) - - F(0) = \frac{1}{3}$. Это и есть результат Архимеда, который он получил прямым вычислением предела в (9).

Обратите внимание: вы сейчас одним движением нашли то, что в свое время потребовало изобретательности гения. (Ну, правда, эдак мимоходом поэксплуатировали красивую идею исчерпания фигуры простыми фигурами, площади которых легко находятся.) Более того, вы с той же легкостью могли бы найти площадь не только под параболой, но и под любой кривой вида $f(x) = x^n$ или даже под любой кривой, являющейся графиком некоторого многочлена. Это уже замечательно, если вспомнить, сколько времени пришлось в школе вычислять площади всего нескольких типов фигур: прямоугольников, треугольников, параллелограммов, трапеций... и, наконец, круга.

Предел интегральных сумм называется *интегралом*[3].

Интеграл от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ обозначается символом

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

в котором числа a и b называются *нижним* и *верхним пределом интегрирования* соответственно; f — *подынтегральная функция*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральное выражение*, x — *переменная интегрирования*.

Итак, по определению

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.} \tag{10}$$

3 Точнее, *определенным интегралом*.

Теперь мы могли бы вместо (8) написать

$$\int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau = s(t) - s(t_0)\ ,$$

а решение задачи Архимеда с площадью под параболой на отрезке [0, 1] записать так:

$$\int_{0}^{1} x^2\, dx = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, формуле (8) Ньютона—Лейбница, связывающей интеграл и первообразную, интегрирование и дифференцирование, теперь можно придать ее канонический вид

$$\boxed{\int_{a}^{b} f(x)\, dx = F(b) - F(a).} \tag{11}$$

Здесь $F' = f$, т. е. F — первообразная функции f.

Обратите внимание: наряду с F любая функция $F + c$, отличающаяся от F на постоянную, тоже является первообразной для f. Но на разности $F(b) - F(a)$ это не сказывается.

Если формулу Ньютона—Лейбница (11) записать в других обозначениях

$$\int_{a}^{x} f(t)\, dt = F(x) - F(a) \tag{12}$$

и рассматривать интеграл с переменным верхним пределом x, то, умея численно находить интеграл как предел сумм (а это легко делается на современном компьютере), мы можем находить величину $F(x) - F(a)$ и тем самым первообразную функции f.

Таким образом, формула (11) полезна в обоих направлениях. Одно направление мы уже продемонстрировали в задаче Архимеда. Другое продемонстрируем ниже на примере желтой подводной лодки, в которой, как утверждали эстрадные классики, мы все живем.

Кстати, после разобранной задачи Архимеда понятно, что стоящий слева в формуле (11) интеграл можно интерпретировать как площадь фигуры — криволинейной трапеции, образованной отрезком $[a, b]$ оси x, графиком функции f над этим отрезком и парой боковых сторон, параллельных второй координатной оси. В частности, если в соответствии с формулой (12) рассматривать эту площадь как функцию $S(x)$ конца x отрезка интегрирования $[a, x]$, то эта функция окажется первообразной подынтегральной функции f. Полезно в этом убедиться и непосредственно, нарисовав картинку и заметив, что $S(x+h) - S(x) \approx f(x)h$, где $f(x)$ — высота, а h — основание приближающего прирост фигуры прямоугольника. При такой интерпретации интеграла надо, конечно, принять во внимание, что площади частей фигуры, лежащих под осью переменной интегрирования, естественно, оказываются отрицательными.

Уточнения, дополнения, приложения, комментарий

Дифференциал. Определяя производную (см. с. 12), мы написали ключевое соотношение

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h). \tag{7}$$

В его левой части стоит величина $\Delta f(x, h) = f(x+h) - f(x)$ *приращения значения функции* f в точке x при смещении от x на величину $\Delta x = (x+h) - x = h$. При фиксированном значении x величина $\Delta f(x, h)$ зависит только от h, и эта зависимость, вообще говоря, может быть весьма сложной. В правой же стороне равенства (7) стоит простейшая линейная по переменной h функция $f'(x)h$ с довеском $o(h)$, малым по сравнению с величиной h, когда h стремится к нулю. Это значит, что при малых h зависимость $\Delta f(x, h) = f(x+h) - f(x)$ можно с малой относительной погрешностью заменить линейной по h функцией $df(x)(h) := f'(x)h$. Она называется *дифференциалом* исходной функции f в рассматриваемой точке x.

Короче, дифференциал функции в точке — это линейная часть приращения функции в этой точке.

А если поподробнее и поточнее, то *дифференциал* $df(x)$ *функции* f *в точке* x — это функция, определенная на смещениях h от точки x, линейная по h, и такая, что с точностью до поправки $o(h)$, малой по сравнению с h, при малых h справедливо приближенное равенство

$$f(x+h) - f(x) = \Delta f(x, h) \approx df(x)(h) = f'(x)h.$$

Приостановимся и «пощупаем» это определение.

1. Пусть $f(x)=x^{\alpha}$. Тогда $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$ (что для натуральных α мы уже даже сами проверили выше). Значит, $(x+h)^{\alpha}-x^{\alpha}\approx\alpha x^{\alpha-1}h$, или $(x+h)^{\alpha}\approx x^{\alpha}+\alpha x^{\alpha-1}h$ при малых h. В частности, при $x=1$ находим, что $(1+h)^{\alpha}\approx 1+\alpha h$, когда величина h близка к нулю. Но тогда легко найти приближенные значения, например, для $\sqrt{1{,}04}$, $0{,}99^5$, $\sqrt[5]{0{,}99}$:

$$\sqrt{1{,}04}\approx 1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}04=1{,}02;\qquad 0{,}99^5\approx 1-5\cdot 0{,}01=0{,}95;$$
$$\sqrt[5]{0{,}99}\approx 1-\frac{1}{5}\cdot 0{,}01=0{,}998.$$

2. Пусть $f(x)=x$. Тогда $f'(x)\equiv 1$. Далее, $\Delta f(x,h)=f(x+h)-$ $-f(x)=(x+h)-x=h$ и $df(x)(h)=dx(h)=1\cdot h$, т. е. в случае, когда $f(x)=x$, имеет место равенство $\Delta f(x,h)=df(x)(h)$ и $dx(h)=h$.

Но тогда в общем случае выражение $df(x)(h)=f'(x)h$ можно переписать в виде $df(x)(h)=f'(x)\,dx(h)$. Это значит, что действующая на смещения h функция $df(x)$ — дифференциал функции f в точке x, представи́м в виде $f'(x)dx$, где dx — дифференциал независимой переменной.

Мы приходим к выражению $df(x)=f'(x)\,dx$, означающему, в частности, что

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}.$$

Именно это и было исходным обозначением Лейбница для производной $f'(x)$. Обозначение $f'(x)$ было введено позднее Лагранжем. Ньютон обозначал производную точкой над знаком функции. Это и сейчас принято делать, когда речь идет о производных переменной величины, зависящей от времени. Например, если $x=x(t)$, то вместо $x'(t)$ или $\dfrac{dx}{dt}$ пишут $\dot{x}(t)$. Отметим еще, что вместо $\dfrac{df(x)}{dx}$ чаще пишут $\dfrac{df}{dx}(x)$ или даже $\dfrac{df}{dx}$.

Обозначения Лейбница широко используются и в целом ряде случаев удобны не только тем, что напоминают об исходном представлении (6) производной как предела отношения приращения функции к приращению аргумента, но и часто подсказывают правильный порядок действий в дифференциальном исчислении.

Касательная. Геометрический смысл производной и дифференциала. Вернемся еще раз к основному соотношению (7) и перепишем его применительно к фиксированной точке x_0 в форме

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \tag{7'}$$

где теперь вместо h стоит $x - x_0$.

Изобразим график зависимости $y = f(x)$ и прямую, заданную уравнением $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Эта прямая проходит через точку $P_0 = (x_0, f(x_0))$ графика.

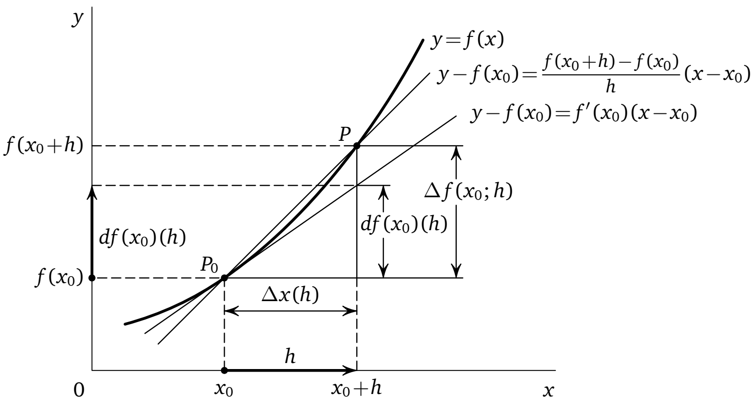

Рис. 3

Соотношение (7′) говорит, что в окрестности точки P_0 график функции с точностью до поправки $o(x - x_0)$, малой по сравнению с величиной $h = x - x_0$ отклонения от x_0, совпадает с указанной прямой. Легко видеть, что прямая с такими свойствами единственна. Она лучше всех иных прямых воспроизводит поведение нашей функции f в окрестности точки x_0 и лучше других прямых приближает график функции в окрестности точки P_0.

По этой причине прямая

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{13}$$

называется *касательной* к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$.

Величина $f'(x_0)$, т. е. значение производной функции f в точке x_0 имеет, таким образом, геометрический смысл *углового коэффициента* или *тангенса угла наклона касательной* к графику функции в соответствующей точке $P_0 = (x_0, f(x_0))$.

Заметьте, если на графике функции f наряду с P_0 взять еще некоторую точку $P=(x_0+h, f(x_0+h))$, провести через эти точки прямую (ее называют *секущей* по отношению к графику), затем, устремляя h к нулю, заставить точку P вдоль графика стремиться к P_0, то секущая будет стремиться к предельному положению, которое и есть касательная к графику функции f в точке P_0.

Рисунок 3 иллюстрирует все основные понятия, связанные с дифференцируемостью вещественнозначной функции в точке, которые мы к настоящему моменту ввели: *приращение аргумента* и соответствующие ему *приращение функции* и *значение дифференциала*; на рисунке изображены *график функции, касательная к графику* в точке $P_0=(x_0, f(x_0))$ и, для сравнения, *секущая*, проходящая через P_0 и некоторую точку $P \neq P_0$ графика функции.

Заметим (см. рис. 3), что если отображение $h \mapsto \Delta f(x_0, h)$ дает приращение ординаты графика функции $y=f(x)$ при переходе аргумента из точки x_0 в точку x_0+h, то дифференциал $df(x_0)$ дает приращение ординаты касательной к графику функции при том же приращении h аргумента.

Отчасти поэтому дифференциал $df(x_0)$ называют также *касательным отображением* к отображению f в соответствующей точке.

Тут мы должны остановиться. Дифференциал, конечно, — центральное понятие, ядро. Как и каждое ядро, оно имеет свою структуру. Ее очень важно и полезно знать и понимать. Но сейчас, сохраняя гармонию масштабов и возможностей, пока не станем в нее более углубляться, оставив это на момент, когда в дальнейших уточнениях появится необходимость.

Пожнем некоторые плоды уже проделанной работы.

3. Для освежения памяти поэкспериментируем сначала с прямой, заданной уравнением $y=kx$. При $k=0$ прямая горизонтальна. Если $k>0$, она «идет в гору» при росте x, и тем круче, чем больше угловой коэффициент k. Аналогично, при $k<0$ она «идет под гору»; значения $y=kx$ убывают с ростом x, и спад идет тем быстрее, чем меньше величина k.

Учитывая это обстоятельство и принимая во внимание геометрический смысл производной функции, можно заключить, что там, где *производная положительна, функция растет*, а на участках, где *производная отрицательна, функция убывает*. При этом рост или убывание функции происходит тем быстрее, чем больше (соответственно меньше) значения ее производной. Это, конечно, можно было бы заметить и глядя на само определение (6) или (7) производной.

Ну а *если производная тождественно равна нулю* на целом промежутке? Надо полагать (и это тоже можно доказать), что *функция постоянна* на таком промежутке. При всей своей простоте и очевидности это очень важный и широко используемый факт.

А что с экстремумами? А *внутренние экстремумы* у дифференцируемой функции, очевидно, могут быть только там, где касательная к ее графику горизонтальна, т. е. *там, где производная функции обращается в нуль*.

При этом ясно, что если $f'(x_0)=0$, а в окрестности этой точки $f'(x)<0$, когда $x<x_0$, и $f'(x)>0$, когда $x>x_0$, то при переходе через точку x_0 локальное убывание функции f сменяется ее ростом, поэтому в такой точке x_0 функция должна иметь *локальный минимум*. При противоположной *смене знака производной* по тем же соображениям можно утверждать, что в точке x_0 функция f имеет *локальный максимум* $f(x_0)$.

Ну а *если смены знака производной не было*, то характер монотонности функции f в окрестности точки x_0 не менялся и никакого *экстремума в этой точке у функции заведомо нет*. Простейшим примером тому может служить функция $f(x)=x^3$, производная которой $f'(x)=3x^2$ всюду положительна, кроме точки $x=0$, где она равна нулю.

Вот мы в первом приближении и выполнили задачу, которую себе поставили после первого урока чтения графика функции.

4. Давайте посмотрим на примере функции $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+1$, как это действует. В рассматриваемом случае $f'(x)=x^2-1$. Производная положительна при $|x|>1$, отрицательна при $|x|<1$, а в точках -1 и 1 обращается в нуль. Значит, когда x растет от $-\infty$ до -1 функция возрастает, причем, как видно, от $-\infty$ до $f(-1)=\frac{5}{3}$. Далее, на отрезке $[-1, 1]$ она убывает до значения $f(1)=\frac{1}{3}$. Наконец, на участке от 1 до $+\infty$ функция монотонно возрастает от $\frac{1}{3}$ до $+\infty$. Заметим еще, что $f(0)=1$. Этих данных уже достаточно, например,

чтобы нарисовать эскиз графика этой функции (сделайте это). Кстати, эта функция имеет локальный максимум в точке -1 и локальный минимум в точке 1, но у нее нет ни абсолютного максимума, ни наименьшего значения.

И последний штрих. Если вычислить производную $(f')'(x) = f''(x) = 2x$ от производной $f'(x) = x^2 - 1$ нашей функции, то, учитывая, что она отрицательна при $x < 0$ и положительна при $x > 0$, можем сказать, что на промежутке от $-\infty$ до 0 функция f', т. е. производная исходной функции f, убывает, а на промежутке от 0 до $+\infty$ функция f' возрастает. Вспоминая, что $f'(x)$ есть угловой коэффициент касательной к графику функции f в точке $(x, f(x))$, можем сказать, что указанное поведение $f'(x)$ означает, что на промежутке от $-\infty$ до 0 график функции f имеет *выпуклость вверх*, а на промежутке от 0 до $+\infty$ имеет *выпуклость вниз*. Изменение характера выпуклости происходит в точке $(x, y) = (0, 1)$. Такая точка, где меняется характер выпуклости кривой, называется *точкой перегиба*. В такой точке кривая неизбежно переходит с одной стороны своей касательной на другую. Типичным тому простым примером может служить начало координат как точка перегиба графика уже упоминавшейся функции $f(x) = x^3$.

Интеграл. Если сопоставить определения дифференциала и интеграла, то становится понятно, что интеграл (см., например, формулу (11)) действует именно на дифференциалы $dF(x) = f(x)\,dx$, объединяя (интегрируя) их и восстанавливая по ним величину $F(b) - F(a)$.

Это обстоятельство часто отражают явно в следующей записи формулы Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b dF = F\big|_a^b. \qquad (11')$$

Здесь $F|_a^b$ обозначает $F(b) - F(a)$, а переменная x в записи функции F и ее дифференциала dF опущена по той простой причине, что от того, какой ее буквой обозначить, ничего в формуле не меняется.

Стоящее справа выражение, точнее вертикальная черта с пределами a и b, напоминает стилизованный интеграл, в котором, однако, участвуют только граничные точки отрезка интегрирования, причем в определенном порядке, или, если угодно, со своими знаками $\{+, b\}$, $\{-, a\}$, чтобы получить именно $F(b) - F(a)$.

Давайте договоримся считать интегралом от функции по точке значение функции в этой точке, причем взятое с тем знаком, который приписан самой точке. Если же имеется несколько таких точек, то под интегралом будем понимать алгебраическую сумму значений функции в этих точках, взятых с соответствующими знаками.

При таком соглашении величину $F(b) - F(a)$ и в самом деле можно интерпретировать как интеграл от функции F по множеству $\{+b, -a\}$, образованному двумя наделенными знаками точками.

А откуда все-таки в формуле (11) вдруг появилось различие между a и b? Дело в том, что оно незаметно присутствовало уже на стадии формирования интегральных сумм. Точка a была начальной, а точка b — конечной. Если их роли поменять, то все члены интегральной суммы одновременно изменят знак (вернитесь к определению интеграла, первому наводящему примеру с движением и непременно убедитесь в этом).

Таким образом, мы имеем дело с интегралом не просто по какому-то отрезку I, а по ориентированному отрезку I_+, когда сказано, какой его конец считается началом (его и ставят внизу в обозначении интеграла), а какой в этом смысле является концом.

Поэтому естественно появляется следующее важное соотношение

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Сделаем теперь еще несколько элементарных геометрических наблюдений. Пусть нам дан отрезок I. Его граница состоит из двух точек — концов отрезка I. Обозначим ее через ∂I. Отрезок I можно ориентировать двумя противоположными способами, поставив на нем стрелку. Если это сделано, то отрезок будем считать ориентированным и обозначать символом I_+. (Противоположно ориентированный отрезок тогда естественно обозначать I_-.) Стрелка на отрезке может показывать, в каком направлении, т. е. от какого конца к какому, надо двигаться и, тем самым, который из концов считается отправной, начальной точкой, а какой — конечной. Договоримся конечной точке приписывать знак $+$, а начальной знак $-$. (Из начальной точки убываем, а в конечную прибываем.)

Приписывание точке знака будем считать заданием ориентации этой точки. Тогда получается, что в этом смысле ориентация отрезка порождает вполне определенную согласованную ориентацию его границы. Если ориентированный отрезок обозначен через I_+, то согласованно ориентированную его границу естественно обозначить как ∂I_+.

Если принять эти соглашения, то формулу Ньютона—Лейбница можно записать совсем красиво и, как выяснится, очень содержательно:

$$\boxed{\int\limits_{I_+} dF = \int\limits_{\partial I_+} F} \tag{11''}$$

Замечательно интересно наблюдаемое здесь взаимодействие операций d и ∂. Это современный, сравнительно недавний вид формулы Ньютона—Лейбница. В таком виде ее можно было бы уже именовать формулой Ньютона—Лейбница—Грина—Гаусса—Остроградского—Стокса—Пуанкаре..., поскольку при соответствующей интерпретации ее элементов она содержит в себе все прочие важнейшие специальные интегральные формулы анализа.

Эта формула объединяет анализ, геометрию, алгебру и имеет самое широкое применение во всех разделах математики, от топологии до математической физики.

Теперь, обсудив определение интеграла и формулу Ньютона—Лейбница, мы остановимся и опробуем это в действии.

5. Пусть на числовом отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ задана функция f с неотрицательными значениями $y = f(x)$ и построен график этой функции. Мы уже знаем, что интеграл от такой функции по отрезку $[a, b]$ дает площадь возникающей здесь фигуры, традиционно называемой криволинейной трапецией. Представим себе, что эта криволинейная трапеция вращается вокруг отрезка $[a, b]$ как оси вращения. Она зачертит некоторое тело (винную бочку, шар, или еще что-нибудь), форма которого зависит от формы графика функции f. Нам надо найти объем этого тела.

Формула (11′) Ньютона—Лейбница учит: чтобы написать нужный интеграл, полезно сначала найти дифференциал искомой величины. Поясним это. Давайте обозначим через $V(x)$ объем такого же тела, когда вместо фиксированного отрезка $[a, b]$ будет рассматриваться переменный отрезок $[a, x]$. Нас интересует значение $V(b)$. Очевидно, $V(a) = 0$, поэтому $V(b) - V(a) = V(b)$.

Значит, учитывая формулу (11′) Ньютона—Лейбница, нам надо найти дифференциал dV и потом уже подсчитать получаемый слева интеграл.

Итак, рассмотрим приращение $V(x+h) - V(x)$ объема тела, вызванное увеличением x на малую величину h. Если h мало, а все значения функции f на малом отрезке $[x, x+h]$ почти одинаковы и близки к $f(x)$, то прирост тела можно приближенно считать равносильным добавлению к нему кругового цилиндра высоты h, в основании которого круг радиуса $f(x)$. Объем такого цилиндра мы знаем: $\pi f^2(x)h$. Таким образом, $V(x+h) - V(x) = \pi f^2(x)h + o(h)$ и $dV(x) = \pi f^2(x)dx$.

Значит, объем V тела в нашей задаче надо вычислять по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Найдем, например, объем шара радиуса r. Для этого вокруг отрезка $[-r, r]$ повращаем полукруг, ограниченный полуокружностью радиуса r. Поскольку уравнение окружности имеет вид $x^2 + y^2 = r^2$, то верхняя полуокружность задается в виде $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Значит, согласно найденной выше формуле,

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx.$$

Первообразная $r^2x - \frac{1}{3}x^3$ функции $r^2 - x^2$ находится сразу. Остается воспользоваться формулой (11) Ньютона—Лейбница и после арифметических действий получить знакомое $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Упражнение. Если продифференцировать функцию $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, дающую объем шара, то получим формулу $V' = 4\pi r^2$ площади поверхности сферы, а если продифференцировать функцию $S = \pi r^2$, дающую площадь круга, то получим формулу $S' = 2\pi r$ длины окружности. Объясните это.

6. Рассмотрим теперь обещанный пример с желтой подводной лодкой и действием формулы Ньютона—Лейбница в обратном на-

правлении, когда интеграл (12) позволяет найти приращение первообразной.

Давайте рассмотрим лифт. Возможность обобщения на лодку станет после этого очевидной.

На цокольном этаже небоскреба вас сажают в лифт, задвигаются глухие двери, и... поехали. Вы чувствуете перегрузки, пропорциональные ускорению лифта. По прошествии некоторого времени T лифт где-то останавливается, но дверь задраена, указателей нет. Сколько проехали, где остановились?

Если бы в лифте на пружинке висела гирька, то можно было бы соорудить самописец, который, фиксируя вертикальные перемещения гирьки, дал бы нам график ускорения $a = a(t)$ как функцию времени. Если $x = x(t)$ — закон движения лифта, то $\ddot{x}(t) = a(t)$, где $\ddot{x}$ обозначает вторую производную функции x по времени. Зная зависимость $a = a(t)$ и начальные условия $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, нам надо найти $x(T)$.

Сначала заставим компьютер посчитать интегралы от функции $\dot{v} = a$ по отрезкам $[0, t]$ и по формуле Ньютона—Лейбница (12) восстановить скорость $\dot{x}(t) = v(t)$ движения как функцию времени на промежутке $[0, T]$. После этого остается попросить его проинтегрировать скорость $v(t)$ по отрезку $[0, T]$ и получить ответ $x(T)$.

Упражнение. a) Проделайте все это вручную применительно к ситуации, когда лифт (ракета) не останавливается, а поднимается с постоянным ускорением a, и вам надо знать ваш закон движения $x(t)$. Кстати, если вы помните, как находить площадь прямоугольника, а затем даже и треугольника, то можете воспользоваться геометрическим смыслом интеграла.

b) Положение тела в пространстве, как известно, характеризуется тремя координатами. Если знать изменение каждой из них по времени, то будет известен весь закон движения тела, т. е. его местонахождение в любой момент времени. Подумайте теперь, как можно историю с лифтом использовать для определения координат подводной лодки.

Интеграл определенный и неопределенный. Когда мы впервые заговорили о решении уравнения $F' = f$, т. е. об отыскании функции F, первообразной по отношению к функции f, то мы еще даже не знали, разрешима ли эта задача для любой функции f. Ответ, вообще говоря, отрицательный. Но для огромного класса практически нужных функций ответ, к счастью, положительный и дается как раз формулой Ньютона—Лейбница, представленной соотношением (12).

Эта формула восстанавливает функцию F с точностью до постоянного слагаемого. Мы уже вскользь отметили, что если на некотором промежутке производная какой-то функции тождественно равна нулю, то сама функция постоянна. Воспользуемся сейчас этим фактом. Если F_1 и F_2 — две первообразные одной и той же функции f на некотором промежутке, то $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$, т. е. две первообразные одной и той же функции на некотором промежутке могут отличаться только постоянным слагаемым. Именно поэтому в формуле Ньютона—Лейбница можно использовать любую первообразную подынтегральной функции.

Если же вы хотите выделить конкретную первообразную, вы можете, например, указать ее значение в некоторой точке. Именно это мы всюду и делали, когда формулировали задачи, связанные с решением дифференциальных уравнений. Мы всюду говорили о тех или иных начальных условиях.

Совокупность всех первообразных некоторой функции f обозначают символом

$$\int f(x)\,dx,$$

называемым *неопределенным интегралом* в отличие от интеграла, где указаны пределы интегрирования и который поэтому иногда именуют *определенным интегралом*.

Если известна одна какая-то первообразная F функции f на промежутке, то любая другая первообразная функции f на том же промежутке имеет вид $F + c$, где c — постоянная. Поэтому можно написать, что

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c,$$

где c — произвольная постоянная.

Постижение техники дифференцирования и интегрирования и приобретение каких-то навыков в этом деле, разумеется, требуют некоторой серии рутинных упражнений. Нельзя научиться плавать, не поплавав.

Метод ломаных Эйлера (и заодно о числе e, функции exp и натуральных логарифмах). Пользуясь определением интеграла (10) как предела сумм (которые поддаются прямому вычислению), а также формулой (12) Ньютона—Лейбница, мы научились восстанавливать первообразную по ее производной, чем и воспользовались в последнем примере 6 для определения координат лифта, ракеты, подводной лодки, ...

В качестве полезного примера использования понятия дифференциала функции и почти всего приобретенного выше опыта попробуем теперь решить самое первое из написанных нами (на первом «уроке письма») уравнений, моделировавших размножение бактерий, рост капитала, ядерную реакцию, изменение атмосферного давления с высотой ... и многое другое.

Рассмотрим сначала простейшую конкретную ситуацию, когда ищется функция f, удовлетворяющая уравнению

$$f'(x) = f(x) \tag{14}$$

и начальному условию $f(0)=1$.

Мы хотим при любом фиксированном значении x знать значение $f(x)$. Будем вслед за Эйлером рассуждать так. Пройдем отрезок $[0, x]$ от начальной точки 0 до точки x маленькими шажками величины $h=\frac{x}{n}$, где n — большое натуральное число.

Если $x_0=0$, $x_{k+1}=x_k+h$, а шаг h мал, то, вспомнив о скорости, производной, приращении функции, дифференциале, будем иметь

$$f(x_{k+1}) \approx f(x_k) + f'(x_k)h.$$

Учитывая (14) и условие $f(0)=1$, последовательно находим, что

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_n) &\approx f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})h = f(x_{n-1}) + f(x_{n-1})h = \\ &= f(x_{n-1})(1+h) \approx (f(x_{n-2}) + f'(x_{n-2})h)(1+h) = \\ &= (f(x_{n-2}) + f(x_{n-2})h)(1+h) = f(x_{n-2})(1+h)^2 \approx \ldots \\ &\ldots \approx f(x_0)(1+h)^n = f(0)(1+h)^n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

Представляется естественным (и это можно доказать), что чем мельче шаг $h=\frac{x}{n}$, тем точнее приближенная формула $f(x) \approx \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

Таким образом, мы приходим к тому, что

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Для величины $f(1)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ вслед за Эйлером введем специальное обозначение

$$\boxed{e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}.} \tag{15}$$

На любом калькуляторе можно легко найти значение величины e с любым нужным числом десятичных знаков. Выпишем несколько первых: $e=2{,}7182818284590\ldots$ Число e так же тесно связано с анализом, как число π с геометрией.

В этих обозначениях, после замены $\frac{x}{n}=t$ и простых преобразований, получаем

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{t\to 0}(1+t)^{x/t}=\lim_{t\to 0}\left((1+t)^{1/t}\right)^x=e^x. \tag{16}$$

Итак, мы нашли, что решение нашей задачи имеет вид $f(x)=e^x$.

Это показательная функция с основанием e. Подобно синусу и косинусу, она имеет свое специальное обозначение exp и часто называется *экспонентой*. Иногда и функцию a^x записывают в виде $\exp_a(x)$. Когда $a=e$ обычно вместо $\exp_e$ пишут просто exp.

Заодно мы теперь знаем, что если $f(x)=e^x$, то $f'(x)=e^x$.

Функция, обратная к показательной функции $\exp_a$, как известно, называется логарифмом и обозначается log. Когда $a=e$, т. е. логарифм по основанию e, называют *натуральным логарифмом* и для него часто используют специальное обозначение ln.

Метод численного решения дифференциального уравнения (14), позволивший нам получить формулу (16), был предложен еще Эйлером и называется *методом ломаных Эйлера*. Такое название связано с тем, что проведенные выкладки геометрически означают замену решения $f(x)$, точнее его графика, некоторой аппроксимирующей график ломаной (см. рис. 4), звенья которой на соответствующих участках $[x_k, x_{k+1}]$ $(k=0, \ldots, n-1)$ задаются уравнениями $y=\alpha_k+\beta_k(x-x_k)$, заменяющими

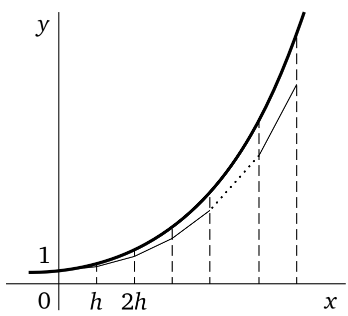

Рис. 4

уравнения $y=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)$ касательных к графику функции f в точках x_k $(k=0, \ldots, n-1)$.

Повторив изложенную процедуру, теперь уже легко найти решение и общего уравнения $f'(x)=kf(x)$ при начальном условии $f(x_0)=c$ (сделайте это). Решением будет функция $f(x)=ce^{k(x-x_0)}$.

Заодно мы находим, что если $f(x)=e^{k(x-x_0)}$, то $f'(x)=ke^{k(x-x_0)}$.

Метод ломаных Эйлера по существу не использует ничего, кроме связи приращения функции с ее дифференциалом и производной. Поэтому он применим не только к рассмотренному уравнению. Более того, он применим и к системам уравнений. Например, можно заставить компьютер исследовать модель хищник-жертва. Если на координатной плоскости (x, y) компьютер будет отмечать состояния $x(t)$, $y(t)$ популяций в момент времени t, то можно будет наблюдать удивительные явления типа периодического колебательного цикла, когда одна величина растет, другая убывает, а потом наоборот. Но могут быть экологически опасные, даже катастрофические необратимые ситуации, когда популяции погибают. Решение одной такой задачи, наблюдение за эволюцией системы при различных начальных условиях, доставляет большие впечатления. Часто оказывается, что накопленный опыт можно применить и в совсем иной сфере. На то она и математика.

Самостоятельная работа

На ней вы сами почувствуете, чему научились, что пропустили, что освоили, а что надо перечитать и переосмыслить.

Предположим, что, следуя Ньютону, мы хотим решить кеплерову задачу двух тел, т. е. хотим объяснить закон движения одного небесного тела m (планета) относительно другого тела M (звезда). Выберем в плоскости движения декартову систему координат с началом в M (рис. 5). Тогда положение m в момент времени t можно охарактеризовать численно координатами $(x(t), y(t))$ точки m в этой системе координат. Мы хотим найти функции $x(t)$, $y(t)$. Движением m относительно M управляют два знаменитых закона Ньютона:

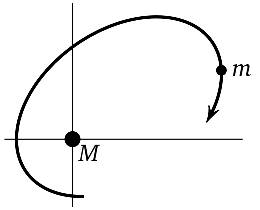

Рис. 5

общий закон движения

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}, \tag{17}$$

связывающий вектор силы с вектором вызванного ею ускорения через коэффициент пропорциональности m — инертную массу тела, и

закон всемирного тяготения, позволяющий найти гравитационное воздействие тел m и M друг на друга по формуле

$$\boldsymbol{F} = G\frac{mM}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r}, \tag{18}$$

где $\boldsymbol{r}$ — вектор с началом в теле приложения силы и концом в другом теле, $|\boldsymbol{r}|$ — длина вектора $\boldsymbol{r}$, или расстояние между m и M.

Зная массы m, M, по формуле (18) без труда выражаем правую часть уравнения (17) через координаты $x(t)$, $y(t)$ тела m в момент t, чем исчерпываем всю специфику данного движения.

Чтобы получить теперь соотношения на $x(t)$, $y(t)$, заключенные в уравнении (17), надо выразить левую часть уравнения (17) через функции $x(t)$, $y(t)$.

Если $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$ — радиус-вектор движущейся точки m в момент t, $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = \boldsymbol{v}(t)$ — вектор скорости изменения $\boldsymbol{r}(t)$ в момент t, а $\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) = \boldsymbol{a}(t)$ — вектор скорости изменения $\boldsymbol{v}(t)$, или ускорение, в момент t, то уравнение (17) можно записать в виде

$$m \cdot \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{F}(t),$$

откуда для нашего движения в поле тяжести получаем в координатном виде

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -GM\dfrac{x(t)}{(x^2(t) + y^2(t))^{3/2}}, \\ \ddot{y}(t) = -GM\dfrac{y(t)}{(x^2(t) + y^2(t))^{3/2}}. \end{cases} \tag{19}$$

Это точная математическая запись нашей исходной задачи.

Если у вас под рукой компьютер, примените метод ломаных Эйлера к решению этой системы уравнений. Фиксировав положение тела M в начале координат, проследите на экране траекторию второго тела и скорость его движения на различных участках траектории.

Меняя начальные данные (координаты и скорость) второго тела, посмотрите за изменением траектории.

Обратите внимание на то, что со временем вычислительная ошибка приводит к сходу тела с его законной орбиты. Как с этим бороться? Кроме того, надо учитывать, что если тела очень сближаются, то силы, ускорения и скорости растут, и для уменьшения ошибки надо уменьшать размеры шага и проявлять такую же аккуратность и осторожность, какую вы проявляете, замедляя и сокращая шаг в местах, где этого требуют обстоятельства. Опыт, особенно собственный, — великий учитель. Он ведь «сын ошибок трудных».

Замечание 1. Выше мы нашли производную $f'(x)=e^x$ функции $f(x)=e^x$. Это позволяет написать следующие полезные соотношения:

$$e^{x+h}-e^x=e^x h+o(h) \quad \text{при } h\to 0 \quad \text{или}$$
$$e^x=e^{x_0}+e^{x_0}(x-x_0)+o(x-x_0) \quad \text{при } x\to x_0.$$

В частности, если $x_0=0$, имеем $e^x=1+x+o(x)$, когда $x\to 0$.

Обратной к функции $y=e^x$ является функция $x=\ln y$. Пусть $y_0=e^{x_0}$, $h=x-x_0=\ln y-\ln y_0$ и $t=y-y_0$. В этих обозначениях из равенства $e^x-e^{x_0}=e^{x_0}(x-x_0)+o(x-x_0)$ получаем $t=e^{x_0}h+o(h)$. Величины t и h стремятся к нулю одновременно. Более того, поскольку $t\approx e^{x_0}h$, любая величина $o(h)$, пренебрежимо малая по сравнению с h при h, стремящемся к нулю, будет бесконечно малой и по сравнению с t. Значит, вместо $h=e^{-x_0}t+o(h)$ можно написать $h=e^{-x_0}t+o(t)$ при $t\to 0$. В прежних обозначениях это выглядит так:

$$\ln y-\ln y_0=e^{-x_0}(y-y_0)+o(y-y_0) \quad \text{при } y\to y_0.$$

Тем самым мы нашли производную функции $x=\ln y$ в точке y_0 и показали, что она обратна производной функции $y=e^x$ в соответствующей точке $x_0=\ln y_0$.

(Очень полезно просмотреть заново проведенное рассуждение и заметить, что оно остается в силе по отношению к любой паре взаимно обратных дифференцируемых функций и устанавливает, что производные взаимно обратных функций взаимно обратны в соответствующих точках.)

Поскольку $(e^{x_0})^{-1} = y_0^{-1}$, имеем

$$\ln y - \ln y_0 = y_0^{-1}(y - y_0) + o(y - y_0) \quad \text{при } y \to y_0.$$

Если независимую переменную обозначать через x, то можно констатировать, что функция $f(x) = \ln x$ имеет своей производной функцию $f'(x) = x^{-1}$.

Отсюда, так же как мы это делали выше по отношению к функции e^x, немедленно получаем следующее полезное соотношение:

$$\ln(1+x) = x + o(x) \quad \text{при } x \to 0.$$

Потом мы и это уточним, и даже сможем сказать, что

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad \text{при } x \to 0.$$

Замечание 2. Посмотрите на формулу (15), определявшую число e.

Нам известно, что $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ при $x \to 0$. А почему бы не воспользоваться этим и не написать $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n \to \infty$, или не написать $(1+t)^{1/t} = 1 + (1/t)t + o(t)$ при $t \to 0$? Тогда бы мы сразу нашли, что $e = 2$!? В чем дело?

Замечательно полезная формула $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ при $x \to 0$ относится к степенной функции u^α, где показатель степени α, по самому определению степенной функции, постоянен!

У нас же не так. В нашем случае следовало бы действовать иначе:

$$(1+t)^{1/t} = e^{(1/t)\ln(1+t)} = e^{(1/t)(t+o(t))} \to e^1 = e \quad \text{при } t \to 0.$$

Сопоставим следующие две ситуации.

а) Вам важно знать величину $\sqrt{x^2+x} - x$ при очень больших значениях x. Вы вправе действовать так:

$$\sqrt{x^2+x} - x = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1\right) = x\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{2} + x\cdot o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{2} + o(1).$$

Здесь $o(1)$ — поправка, стремящаяся к нулю при $x \to +\infty$.

b) А вот если бы при очень больших значениях x вам было важно знать величину $\left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^x$, вы поступали бы иначе:

$$\left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^x = \exp\left\{x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 1\right)\right\} = \exp\left\{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - x\right\} =$$
$$= \exp\left\{x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - x\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2} + o(1)\right\} \to e^{-1/2}.$$

Значит, при $x \to \infty$ значения интересующей вас величины стабилизируются и, точнее, стремятся к числу $e^{-1/2}$.

Замечание 3. В замечании 2 мы упомянули полезное соотношение $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x + o(x)$ при $x \to 0$. Оно было нами доказано раньше только для натурального α. Но теперь его легко получить сразу в общем виде. В самом деле, при $x \to 0$

$$(1+x)^\alpha = \exp\{\alpha\ln(1+x)\} = \exp\{\alpha(x+o(x))\} =$$
$$= 1+\alpha(x+o(x)) + o(\alpha(x+o(x))) = 1+\alpha x + o(x).$$

Вспомните смысл символа $o(x)$ при $x \to 0$ и проверьте эту выкладку. Поскольку $(x+h)^\alpha = x^\alpha\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha$, то при $h \to 0$ имеем

$$(x+h)^\alpha = x^\alpha\left(1+\alpha\frac{h}{x} + o(h)\right) = x^\alpha + \alpha x^{\alpha-1}h + o(h),$$

и тем самым устанавливаем, что если $f(x) = x^\alpha$, то $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Упражнения

а. Найдите форму поверхности жидкости, равномерно вращающейся в стакане.

в. *Закон преломления света в геометрической оптике* (*закон Снеллиуса*). Согласно *принципу Ферма* истинная траектория света между любыми двумя точками такова, что на ней реализуется минимум времени, которое необходимо свету, чтобы пройти из одной точки в другую по любому фиксированному пути, соединяющему эти точки.

Из принципа Ферма и того, что кратчайшей линией между любыми двумя точками является отрезок прямой с концами в этих точ-

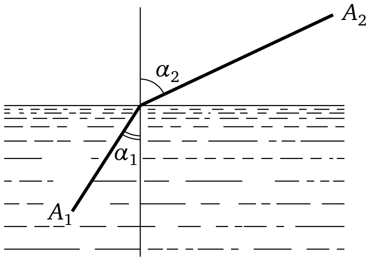

Рис. 6

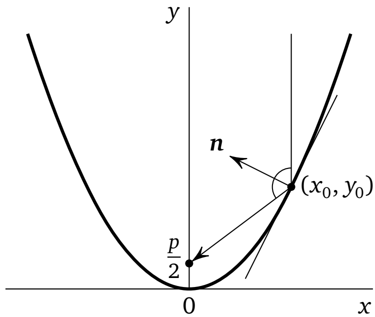

Рис. 7

ках, следует, что в однородной изотропной среде (устроенной одинаково как в каждой точке, так и в каждом направлении) свет распространяется прямолинейно.

Пусть теперь имеются две такие среды и свет распространяется из точки A_1 к A_2, как показано на рис. 6.

Найдите траекторию света, отвечающую принципу Ферма, и откройте закон преломления $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}$. Здесь c_1 и c_2 — скорости света в каждой из сред.

с. *Оптическое свойство параболического зеркала.* Рассмотрите параболу $y = \frac{1}{2p}x^2$ $(p > 0)$, постройте касательную к ней в точке $(x_0, y_0) = \left(x_0, \frac{1}{2p}x_0^2\right)$ и, учитывая, что «угол падения равен углу отражения», покажите, что источник света, помещенный в точке $\left(0, \frac{p}{2}\right)$ — в фокусе параболического зеркала, даст пучок, параллельный оси Oy зеркала, а приходящий параллельно оси Oy пучок зеркало пропустит через фокус (см. рис. 7).

d. Покажите, что при $x > 0$

$$x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \leqslant 0, \quad \text{когда } 0 < \alpha < 1,$$
$$x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \geqslant 0, \quad \text{когда } \alpha < 0 \text{ или } 1 < \alpha.$$

С помощью элементарных алгебраических преобразований из этих неравенств получите следующие классические и важные для анализа неравенства.

Неравенства Бернулли. Покажите, что при $x > -1$

$$(1+x)^\alpha \leqslant 1+\alpha x, \quad \text{когда } 0 < \alpha < 1,$$
$$(1+x)^\alpha \geqslant 1+\alpha x, \quad \text{когда } \alpha < 0 \text{ или } 1 < \alpha.$$

Неравенства Юнга. Если $a > 0$ и $b > 0$, а числа p, q таковы, что $p \neq 0, 1$, $q \neq 0, 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то

$$a^{1/p} b^{1/q} \leqslant \frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b, \quad \text{если } p > 1,$$
$$a^{1/p} b^{1/q} \geqslant \frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b, \quad \text{если } p < 1,$$

причем знак равенства в этих неравенствах имеет место только при $a = b$.

Неравенства Гёльдера. Пусть $x_i \geqslant 0$, $y_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{1/q} \quad \text{при } p > 1;$$
$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \geqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{1/q} \quad \text{при } p < 1, \ p \neq 0.$$

В случае $p < 0$ в последнем неравенстве предполагается, что $x_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Знак равенства в обоих этих неравенствах возможен только в случае пропорциональности векторов $(x_1^p, \ldots, x_n^p)$, $(y_1^q, \ldots, y_n^q)$.

Неравенства Минковского. Пусть $x_i \geqslant 0$, $y_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{1/p} \quad \text{при } p > 1;$$
$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{1/p} \geqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{1/p} \quad \text{при } p < 1, \ p \neq 0.$$

е. *Средние.* В математике, и не только в ней, приходится иметь дело с различными средними значениями величин. Например, всем известно *среднее арифметическое*

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Вообще, средним порядка α этих чисел называют величину

$$s_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}.$$

В частности, при $\alpha = 1, 2, -1$ получаем соответственно *среднее арифметическое*, *среднее квадратичное* и *среднее гармоническое* этих чисел (последнее в предположении, что все числа отличны от нуля).

Будем считать, что все числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ неотрицательны, а если степень $\alpha < 0$, то будем предполагать, что они даже положительны.

1. Используя неравенство Гёльдера, покажите, что если $\alpha < \beta$, то

$$s_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant s_\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

причем равенство имеет место, лишь когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

2. Конечно, в определении средних порядка α надо что-то сказать о том, как это понимать, когда $\alpha = 0$. Поступают так: смотрят, как ведет себя величина $s_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, когда α стремится к нулю. Используя накопленный опыт отыскания приближенных значений показательной и логарифмической функций, покажите, что при стремлении α к нулю величина $s_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ стремится к $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$, т. е. к *среднему геометрическому* этих чисел.

С учетом результата задачи 1 отсюда, например, следует классическое неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим неотрицательных чисел (напишите его).

3. Если $\alpha \to +\infty$, то $s_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а при $\alpha \to -\infty$ величина $s_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ стремится к меньшему из рассматриваемых чисел, т. е. к $\min(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Докажите это.

F. *Выпуклость.* Весьма полезным свойством функции, если она им обладает, является ее *выпуклость*. Вскользь о выпуклости мы уже говорили, обсуждая геометрический смысл производной и ее использование при построении графиков функций. Теперь дополним сказанное там точным определением понятия выпуклости и укажем некоторые возможности его применения.

Напомним, что в геометрии фигура, тело и вообще множество называется выпуклым, если вместе с любой парой своих точек оно содержит и весь соединяющий их отрезок.

Пусть нам дана вещественнозначная функция f, определенная на числовом промежутке $[a, b]$. В плоскости прямоугольных координат (x, y) рассмотрим область D_f^+, лежащую над графиком Γ_f функции f. Точнее, $D_f^+ := \{(x, y) : x \in [a, b],\ y \geqslant f(x)\}$. Эту область называют *надграфиком функции* f на промежутке $[a, b]$. Понятно, что́ тогда следует назвать *подграфиком* D_f^- функции f на данном промежутке.

Функция называется *выпуклой* (*вогнутой*) на некотором промежутке, если ее надграфик (подграфик) на этом промежутке является выпуклым множеством.

Например, функция sin вогнута (горб вверх) на промежутке $[0, \pi]$ и выпукла (горб вниз) на промежутке $[\pi, 2\pi]$. (В первом случае тут крыша, с которой вода стекает, а во втором случае, т. е. в случае выпуклости, тут сосуд, в который воду можно собрать. Иногда вместо слов вогнутый и выпуклый говорят соответственно выпуклый вверх и выпуклый вниз.) Поскольку функция sin имеет период 2π, то теперь уже можно судить о характере ее выпуклости на любом промежутке числовой оси.

Функция f, задаваемая соотношением $f(x) = x^2$, выпукла на всей числовой оси. Ее график — парабола — известен каждому со школьной скамьи. Если же положить $f(x) = -x^2$, то получим вогнутую функцию, графиком которой является парабола, усы которой уходят вниз, а горб торчит вверх.

Ясно, что замена f на $-f$ и в общем случае обращает выпуклость и вогнутость функции, поэтому достаточно изучить один из этих двух случаев, например, случай выпуклой функции f.

1. Вспомните, как связаны графики прямой и обратной функций f и f^{-1}, и покажите, что на соответствующих друг другу промежутках если одна из функций выпукла (вогнута), то другая вогнута (выпукла).

Рассмотрите графики показательной функции и логарифма при различных основаниях, а также графики степенной функции при различных показателях степени.

2. Вспомните геометрический смысл производной и объясните следующие утверждения:

дифференцируемая функция f выпукла на промежутке тогда и только тогда, когда ее производная f' — неубывающая функция на этом промежутке;

если функция f имеет вторую производную f'' на промежутке, то для выпуклости функции f достаточно, чтобы функция f'' была неотрицательна на этом промежутке.

Как выглядят аналогичные утверждения для вогнутых функций?

Обоснуйте теперь характер выпуклости элементарных функций, которые были перечислены в пункте 1.

3. Пусть функция f выпукла на промежутке $[a, b]$. Нарисуйте график функции f, соедините его концы отрезком, вспомните определение выпуклой функции и, глядя на рисунок, объясните важное неравенство $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$. Объясните, почему знак равенства тут может быть только тогда, когда функция линейна на отрезке $[a, b]$, т. е. имеет вид $f(x) = c_0 + c_1 x$.

4. Докажите, что если функция f выпукла на промежутке $[a, b]$, а x_1 и x_2 — любые две точки этого промежутка, то

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2};$$

и вообще, при любых $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$, таких что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$,

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Каждое из этих двух неравенств можно было даже принять за формальное аналитическое определение функции, выпуклой на промежутке, а потом найти тот геометрический смысл выпуклости функции, с которого мы начали.

5. По индукции или иначе докажите теперь, что если функция f выпукла на промежутке $[a, b]$, а $x_1, \ldots, x_n$ — какие-то точки этого промежутка, то справедливо следующее важное неравенство (обычно называемое *неравенством Йенсена*)

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n),$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ любые неотрицательные числа такие, что $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$.

Выясните, при каких условиях в этом неравенстве возможен знак равенства.

6. Область на плоскости или в пространстве называется строго выпуклой, если отрезок, соединяющий любые две различные точки границы области всеми своими точками, кроме концов, содержится

строго внутри области (т. е. неконцевые точки отрезка лежат в области, но уже не на ее границе). Например, стандартный круг или шар строго выпуклы, а треугольник или полуплоскость не строго выпуклы.

Просмотрите ход предыдущих определений и рассуждений. Дайте определение функции, *строго выпуклой* на промежутке и сформулируйте аналоги предыдущих неравенств в этом случае.

Как, по-вашему мнению, выглядит критерий строгой выпуклости дифференцируемой функции в терминах строгой монотонности ее производной на соответствующем промежутке?

7. Проверьте, что функция exp строго выпукла на вещественной оси, а обратная к ней функция ln строго вогнута (выпукла вверх) на области своего определения (т. е. для положительных значений ее аргумента).

8. Напишите неравенство Йенсена для строго вогнутой функции и, в частности, для функции ln. Получите из последнего неравенство

$$x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n,$$

где числа $x_1, \ldots, x_n$ положительны, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — неотрицательные числа, такие что $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$. Укажите, когда это неравенство обращается в равенство.

В частности, при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 1/n$ отсюда получается классическое соотношение между средним геометрическим и средним арифметическим, о котором было сказано в пункте Е о средних. При каких условиях в нем возможно равенство?

9. Если дифференцируемая функция выпукла на каком-то промежутке, то ее график лежит не ниже любой касательной к графику на этом промежутке. Если функция к тому же строго выпукла, то все точки графика, кроме точки касания, лежат строго выше касательной прямой. Объясните это, исходя из геометрического определения выпуклой и строго выпуклой функции.

Объясните в этой связи следующие соотношения:

$e^x \geqslant x + 1$, причем $e^x > x + 1$, если $x \neq 0$;
$\ln x \leqslant x - 1$ при $x > 0$ и $\ln x < x - 1$, если $x > 0$, но $x \neq 1$.